

CIA. EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.

presenta la "SERIE COMPLEMENTARIA DE MATEMÁTICAS", de alta calidad didáctica en económica, dedicada a materias complementarias de enseñanza en todos los niveles de la instrucción matemática.

La SERIE COMPLEMENTARIA DE MATEMÁTICAS consta de los siguientes volúmenes:

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, por Howard W. Eves (Tomo I)

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, por Howard W. Eves (Tomo II)

INTRODUCCION A LAS TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS, por Howard H. Barry

ALGEBRA VECTORIAL, por Richard E. Johnson

CONCEPTOS MATEMATICOS-ENFOQUE HISTORICO, Margaret F. Willerding

FUNDAMENTOS DE LAS MATEMATICAS MODERNAS, por Lyle E. Mehlenbacher

ALGEBRA VECTORIAL

Por RICHARD E. JOHNSON

La utilidad de la obra puede justificarse. En primer lugar, el material está detallado y presentado para estudio individual. En consecuencia, el estudiante de física o de matemáticas podría usarlo para lectura complementaria sobre vectores. Otra razón es su posible uso como texto introductorio en un curso sobre álgebra abstracta. Finalmente, este libro, junto con un texto de álgebra lineal, serviría para un curso sobre vectores y álgebra lineal.

512.5
J 68

CECSA

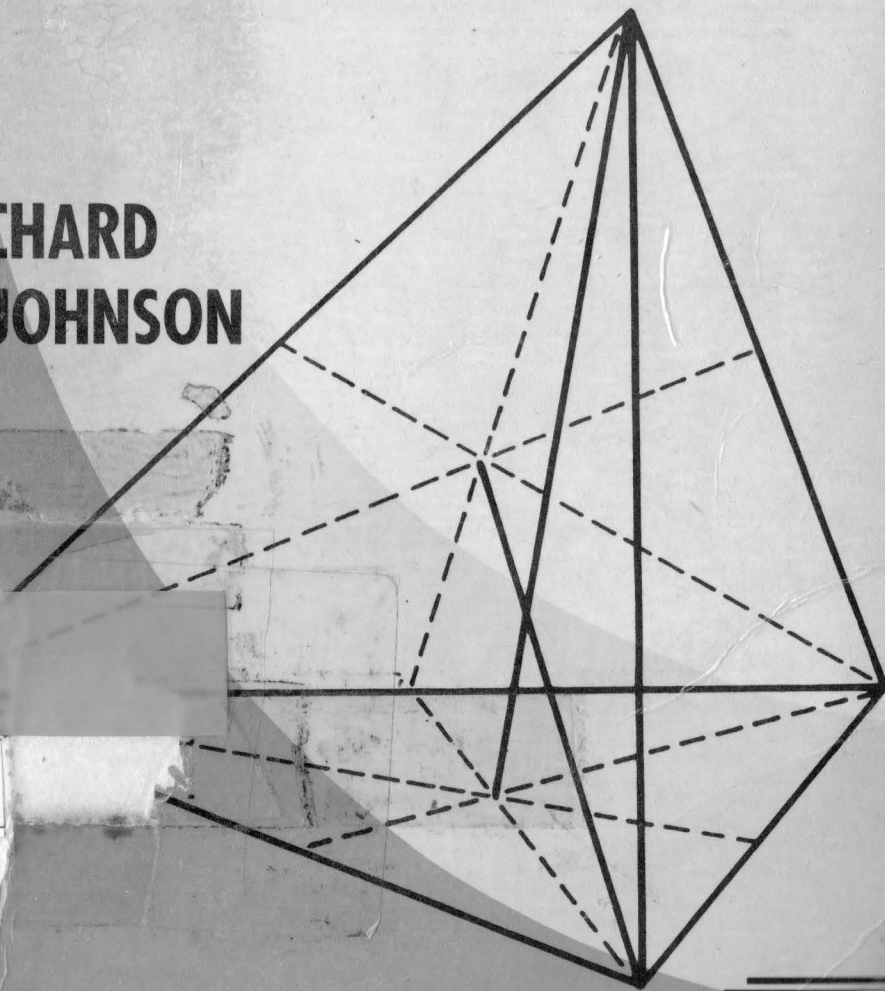
RICHARD E. JOHNSON

ALGEBRA VECTORIAL

RICHARD
E. JOHNSON

SERIE COMPLEMENTARIA DE MATEMATICAS

C. E. C. S. A.



Algebra Vectorial

Por

RICHARD E. JOHNSON



COMPañIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.

MEXICO — ESPAÑA — ARGENTINA — CHILE

SUCURSALES, DEPOSITOS Y REPRESENTACIONES EN:

Bolivia — Brasil — Colombia — Costa Rica — Dominicana — Ecuador — El Salvador
Estados Unidos — Guatemala — Honduras — Nicaragua — Panamá — Paraguay
Perú — Puerto Rico — Uruguay — Venezuela

Título original en inglés:

VECTOR ALGEBRA

Traducido por

Ing. EDUARDO TONDA MAGALLON

Departamento de Abreviación del Cálculo del Centro
de Investigaciones Arquitectónicas de la
Universidad Nacional Autónoma de México

Supervisor

ANDRES SESTIER BOUCLIER

Maestro en Ciencias del Centro de Investigación
y Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional, México
Catedrático en la Escuela de Física y Matemáticas del
Instituto Politécnico Nacional, México

Edición autorizada por

PRINDLE, WEBER AND SCHMIDT, INC. — Boston, Mass.

© 1966

Library of Congress Catalog Card Number: 66-20380

1a. edición en inglés: 1966

1a. edición en español de la 1a. edición en inglés:
enero de 1969

Derechos Reservados © en Lengua Española—1968, Primera Publicación

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.

CALZADA DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

AV. REPÚBLICA ARGENTINA NÚM. 168, BARCELONA 6, ESPAÑA
ENTRE RÍOS NÚM. 1256, BUENOS AIRES, ARGENTINA
AMUNÁTEGUI NÚM. 458, SANTIAGO DE CHILE, CHILE

Prólogo

Los espacios vectoriales finito-dimensionales son particularmente adecuados como el primer tópico para el estudio de Álgebra abstracta. Una razón para ello es que la teoría es directa sin ser trivial, y conduce a una descripción completa de tales sistemas algebraicos. Otra razón es que los espacios vectoriales se encuentran en todas las ramas de las matemáticas, desde análisis hasta geometría y topología. Finalmente, hay ejemplos concretos accesibles de espacios vectoriales para ilustrar la teoría así como para preparar al estudiante para sus aplicaciones en física, ingeniería y otras ciencias.

A lo largo del libro se supone que el campo subyacente de escalares es el campo de los números reales $\mathbf{R}$. Sin embargo, en casi todas las secciones del libro, cualquier otro campo F podría sustituirse por $\mathbf{R}$ sin requerir por ello ningún cambio.

Las propiedades sencillas de los espacios vectoriales y sus subespacios se dan en el primer capítulo. Los dos ejemplos principales de espacios vectoriales, espacios vectoriales geométricos y el espacio de n -adas de números reales, también se presentan en este capítulo para que puedan usarse a través del libro.

La mayor parte de la teoría está en el Cap. 2, donde se demuestra la invariancia de la dimensión de un espacio vectorial. Los productos internos se discuten en el Cap. 3, y se demuestra la existencia de una base ortogonal normal para espacios vectoriales finito-dimensionales.

En el Cap. 4 se investiga la utilísima operación producto cruz en los espacios vectoriales geométricos. Después se hacen aplicaciones para encontrar ecuaciones de líneas y planos en el espacio.

Se definen en un apéndice los campos en general y los campos ordenados en particular. Hay también una sección corta sobre sistemas coordinados para líneas, planos y espacio. Los espacios vectoriales sobre el campo de los números complejos se tratan en forma breve en otra sección. La última sección relaciona el álgebra de vectores al álgebra de cuaternios de Hamilton.

Se espera que el libro resulte provechoso en diversos modos. En primer lugar, el material está detallado y ampliamente ilustrado para un estudio individual. Por lo tanto, el estudiante de física o matemáticas podría usar el libro para una lectura suplementaria sobre vectores. Otro uso posible es como texto en un curso de álgebra abstracta en preparatoria. Por último, este libro, al igual que el de Algebra Lineal de la Serie Complementaria de la Prindle, Weber & Schmidt, podría servir como texto en un curso de universidad sobre vectores y álgebras lineales.

RICHARD E. JOHNSON

Contenido

Prólogo	5
CAPITULO UNO. ESPACIOS VECTORIALES	9
1. Definición	9
2. Subespacios	12
3. Vectores Geométricos	14
4. n -Adas como Vectores	25
CAPITULO DOS. BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL	31
1. Independencia	31
2. Bases	34
3. Dimensión	38
4. Homomorfismos	45
CAPITULO TRES. ESPACIOS DE PRODUCTO INTERNO	57
1. Productos Internos	57
2. Bases Ortogonales Normales	68
CAPITULO CUATRO. ALGEBRAS VECTORIALES	73
1. Algebra de Dos Dimensiones	73
2. Algebra Tridimensional	76
3. Líneas en el Espacio	84
4. Planos en el Espacio	92
APENDICE	97
1. Campos	97
2. Sistemas Coordenados	102
3. Espacios Unitarios	106
4. Nota Histórica	109
INDICE	113



Espacios Vectoriales

1. DEFINICION

Un vector es un elemento de un espacio vectorial. A su vez, un espacio vectorial es un conjunto de objetos, llamados vectores, cerrado bajo operaciones de suma y multiplicación escalar y que satisface ciertas leyes algebraicas. Una definición precisa de un espacio vectorial se da más abajo.

Es conveniente estudiar los espacios vectoriales por la razón de que muchos de los sistemas algebraicos que se encuentran en las aplicaciones de las matemáticas son, en esencia, espacios vectoriales. Al estudiar espacios vectoriales generales sin prestar atención a la naturaleza de los elementos, podemos desarrollar las propiedades comunes a todos los espacios vectoriales.

A lo largo de este libro se denotará por $\mathbb{R}$ al conjunto de todos los números reales. Hay dos operaciones básicas en $\mathbb{R}$, suma y multiplicación y una relación de orden básica de mayor que o igual a. Por supuesto que $\mathbb{R}$ tiene también operaciones de resta y división y relaciones de orden de mayor que, menor que o igual a, y menor que. Con respecto a sus operaciones y relaciones, $\mathbb{R}$ es un campo ordenado como se define en el Apéndice.

1.1. Definición de un Espacio Vectorial. Un espacio vectorial consiste de un conjunto V , una operación de suma en V , y una operación de multiplicación escalar de V por $\mathbb{R}$. La suma en V tiene las siguientes propiedades:

- (1) $x + y = y + x$ para todo $x, y \in V$. (*Ley conmutativa*)
- (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo $x, y, z \in V$. (*Ley asociativa*)
- (3) Existe un elemento 0 en V tal que
 $0 + x = x + 0 = x$ para todo $x \in V$. (*Elemento de identidad*)
- (4) Asociado a cada x en V hay un elemento $-x$ en V tal que
 $x + (-x) = (-x) + x = 0$ para todo $x \in V$. (*Elementos inversos*)

Para cada $a \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in V$, el producto escalar* de $\mathbf{x}$ por a es un elemento único de V denotado por $a\mathbf{x}$. La multiplicación escalar tiene las siguientes propiedades:

- (5) $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. (Ley distributiva)
- (6) $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V$. (Ley distributiva)
- (7) $(ab)\mathbf{x} = a(b\mathbf{x})$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V$. (Ley asociativa)
- (8) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in V$. (Elemento de identidad)

Las ocho propiedades de suma y multiplicación escalar citadas arriba nos son conocidas. Por lo tanto, las propiedades (1)-(4) se tienen para la suma en $\mathbb{R}$ y las propiedades (5)-(8) se tienen para la multiplicación en $\mathbb{R}$, si consideramos al conjunto V como $\mathbb{R}$.

Llamaremos *vectores* a los elementos de V y *escalares* a los de $\mathbb{R}$. Los vectores se denotan por negrillas para distinguirlos claramente de los escalares. Generalmente denotamos los escalares por las primeras letras del alfabeto y los vectores por las últimas. Al escribir símbolos para vectores, quizás desee poner una flecha sobre el símbolo para indicar que denota un vector.

Pueden derivarse ciertas propiedades adicionales de un espacio vectorial a partir de las ocho que lo definen. Por ejemplo, podemos esperar que se cumplan las siguientes propiedades ya que las correspondientes lo hacen en un campo. Sea V un espacio vectorial, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ y $a \in \mathbb{R}$.

1.2 Si $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ o $\mathbf{z} + \mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. (Ley de cancelación)

1.3 $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y solamente si $a = 0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

1.4 $-(a\mathbf{x}) = (-a)\mathbf{x} = a(-\mathbf{x})$.

Demostración de 1.2: Si $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, entonces

$$(\mathbf{x} + \mathbf{z}) + (-\mathbf{z}) = (\mathbf{y} + \mathbf{z}) + (-\mathbf{z})$$

$$\mathbf{x} + [\mathbf{z} + (-\mathbf{z})] = \mathbf{y} + [\mathbf{z} + (-\mathbf{z})] \quad (\text{Ley Asoc.})$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{y} + \mathbf{0} \quad (\text{Elemento Inv.})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (\text{Elemento Id.})$$

Si $\mathbf{z} + \mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ por la ley conmutativa y $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ por la demostración de arriba.

* El producto punto, definido más adelante, es a menudo llamado producto escalar. Evitar la confusión. (N. del R.)

Demostración de 1.3: Esta propiedad señala que $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y solamente si a es el escalar cero o $\mathbf{x}$ el vector cero. Si $a = 0$, el elemento 0 de $\mathbb{R}$, entonces $0 = 0 + 0$ y $0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$ por 1.1(6). Ya que $\mathbf{0} + 0\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$ por 1.1(3), tenemos

$$\mathbf{0} + 0\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$$

y

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x}$$

por 1.2. Un argumento semejante demuestra que $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Inversamente, supongamos que $a \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x} \in V$ son tales que $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $a \neq 0$, entonces a^{-1} existe y

$$\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = (a^{-1}a)\mathbf{x} = a^{-1}(a\mathbf{x}) = a^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Si $a = 0$, entonces $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$ por la demostración de arriba. Esto demuestra 1.3.

Demostración de 1.4: Por 1.1(4), $a\mathbf{x} + [-(a\mathbf{x})] = \mathbf{0}$, mientras que por 1.1(7) y 1.3, $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = [a + (-a)]\mathbf{x} = a\mathbf{x} + (-a)\mathbf{x}$. Por lo tanto

$$a\mathbf{x} + [-(a\mathbf{x})] = a\mathbf{x} + (-a)\mathbf{x}$$

y

$$-(a\mathbf{x}) = (-a)\mathbf{x}$$

por la ley de cancelación. Una demostración semejante indica que $-(a\mathbf{x}) = a(-\mathbf{x})$. Esto demuestra 1.4.

La operación de resta en V se define como sigue:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) \text{ para todas las } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Puede demostrarse fácilmente que la resta vectorial tiene propiedades semejantes a aquellas de resta en $\mathbb{R}$. Por ejemplo,

$$a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} - a\mathbf{y} \text{ para todas las } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, a \in \mathbb{R},$$

$$-(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{y} \text{ para todas las } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Por lo tanto supondremos que el lector está familiarizado con estas propiedades.

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, V se supone que es un espacio vectorial.

1. Demuéstrese que $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para toda $a \in \mathbb{R}$ (parte de 1.3).

2. Demuestre que $-(ax) = a(-x)$ para toda $a \in R$ y $x \in V$ (parte de 1.4).
3. Enuncie y demuestre una ley de cancelación para multiplicación escalar.
4. Demuéstrese que $a(x - y) = ax - ay$ para todo $x, y \in V$, $a \in R$.
5. Demuéstrese que $-(x - y) = (-x) + y$ para todo $x, y \in V$.

2. SUBESPACIOS

Si V es un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío de V que es cerrado bajo suma y multiplicación escalar (esto es, $x + y$ y ax están en S para todo $x, y \in S$, $a \in R$), entonces S es un espacio vectorial por derecho propio. Por lo tanto, $0 \in S$ ya que $0 = 0x$ para cualquier $x \in S$. Si $x \in S$, entonces $-x \in S$ también, ya que $-x = -(1x) = (-1)x$. Resulta claro ahora que 1.1(1)-(8) se mantiene para S igual que para V . Llamamos a S un *subespacio* de V .

Para cada $x \in V$ el conjunto de todos los múltiplos de x se denota por R_x ,

$$R_x = \{ax \mid a \in R\}.$$

Ya que

$$ax + bx = (a + b)x \quad y \quad b(ax) = (ba)x,$$

el conjunto R_x es cerrado bajo suma y multiplicación escalar y es por lo tanto un subespacio de V . El conjunto de múltiplos escalares de 0 es simplemente $\{0\}$. Por lo tanto, $\{0\}$ es un subespacio de V ; de hecho, $\{0\}$ es el menor subespacio de V en el sentido de que está contenido en todos los otros subespacios de V . Trivialmente, V es un subespacio de sí mismo de acuerdo con nuestra definición.

Llamamos a un subespacio S de V *propio* si $S \neq \{0\}$ y $S \neq V$. Si $x \in V$, $x \neq 0$, entonces R_x es un subespacio mínimo no cero. Pues si S es un subespacio propio de V y $S \subset R_x$, y si $y \in S$, $y \neq 0$, entonces $y = ax$ para cierto $a \in R$ no cero. Por lo tanto, $(ba^{-1})y = (ba^{-1})ax = bx$ está en S por toda $b \in R$ y $R_x \subset S$. Se sigue que $S = R_x$. El subespacio R_x es propio, a menos que $V = R_x$, una posibilidad poco interesante.

Si S_1 y S_2 son subespacios de un espacio vectorial V , entonces lo es también su *intersección*,

$$S_1 \cap S_2 = \{x \in V \mid x \in S_1 \text{ y } x \in S_2\}.$$

Pues si x y y están tanto en S_1 como en S_2 también lo están $x + y$ y ax para toda $a \in R$.

De un modo más general, si $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ es un conjunto finito de subespacios de V , entonces su intersección $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$ también es un subespacio de V . La notación

$$\bigcap_{i=1}^n S_i$$

se usa frecuentemente para esta intersección. Evidentemente $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$ es el *máximo* subespacio de V contenido en todos los subespacios $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Otro modo útil de formar un subespacio a partir de dos subespacios dados S_1 y S_2 de un espacio vectorial V es tomar su *suma*:

$$S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}.$$

Para indicar que $S_1 + S_2$ es realmente un subespacio de V , sea $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in S_1 + S_2$, donde $x_i, y_i \in S_i$, y $a \in R$. Entonces

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in S_1 + S_2,$$

$$a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 \in S_1 + S_2.$$

Por lo tanto $S_1 + S_2$ es un subespacio de V porque es cerrado bajo suma y multiplicación escalar.

De una manera semejante podemos formar la suma de n subespacios $S_1, S_2, \dots, S_n$ de V :

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid x_i \in S_i\}.$$

La notación sigma

$$\sum_{i=1}^n S_i$$

se usa frecuentemente para esta suma. Puesto que $0 \in S_i$ para cada i , $x_1 + 0 + 0 + \dots + 0 = x_1 \in S_1 + S_2 + \dots + S_n$ para cada $x_1 \in S_1$. Esto es, $S_1 \subset S_1 + S_2 + \dots + S_n$. De una manera semejante,

$$S_j \subset \sum_{i=1}^n S_i \text{ para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Debería resultar claro que $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ es el *mínimo* subespacio de V que contiene a todos los subespacios $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, entonces ya sea $R_{\mathbf{x}} \cap R_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{0}\}$ o $R_{\mathbf{x}} = R_{\mathbf{y}}$. Por otro lado,

$$R_{\mathbf{x}} + R_{\mathbf{y}} = \{a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Más generalmente, para cualquier colección $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$,

$$\sum_{i=1}^n R_{\mathbf{x}_i} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Llamamos a $S = \sum_{i=1}^n R_{\mathbf{x}_i}$ el subespacio de V *generado* por los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Cada vector de S se dice que es una *combinación lineal* de los n vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$.

EJERCICIOS

1. Si S_1, S_2 , y S_3 son subespacios propios de V de tal modo que $S_1 \cap (S_2 + S_3) = \{\mathbf{0}\}$ y $S_2 \cap S_3 = \{\mathbf{0}\}$, entonces pruebe que $S_2 \cap (S_1 + S_3) = \{\mathbf{0}\}$.
2. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, y $\mathbf{x}_3$ vectores no cero que generan un espacio vectorial V . Si $\mathbf{y} \in V$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, pruebe que $\mathbf{y}$, junto con otros dos de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, generan a V .
3. Generalice el Ejercicio 2 de tres vectores a n vectores.
4. Si S_1 y S_2 son subespacios de V tales que $S_1 \supset S_2$, demuestre que $S_1 \cap (S_2 + S) = S_2 + (S_1 \cap S)$ para cada subespacio S de V . (Esto se llama la *ley modular*.)

3. VECTORES GEOMETRICOS

Por muchos siglos los físicos han usado segmentos lineales (rectilíneos) dirigidos para representar fuerzas, velocidades, aceleraciones y otras entidades que tienen magnitud y dirección. Describiremos en esta sección el espacio de vectores geométricos, o segmentos lineales dirigidos, usados por los físicos.

Consideremos un plano euclidiano, denotado por E_2 , compuesto de puntos y líneas que satisfacen los postulados de la geometría euclidiana. Todo par ordenado (A, B) de puntos en E_2 determina un *segmento* con puntos extremos A y B y una *dirección* desde el *punto inicial* A hasta el *punto terminal* B . A tal segmento dirigido lo llamamos un *vector* en E_2 y lo denotamos por

$\overrightarrow{AB}$.

El conjunto de todos los vectores en E_2 es denotado por

V_2 .

Será conveniente tener un sistema coordinado en E_2 (véase el Apéndice) de tal modo que cada vector $\overrightarrow{AB}$ tenga una longitud denotada por

$|\overrightarrow{AB}|$

y definida como $d(A, B)$, la distancia entre los puntos A y B .

Consideraremos los vectores en V_2 como *vectores libres*; esto es, dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ se considerarán iguales,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$

si y sólo si $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = 0$ (esto es, $A = B$ y $C = D$) o $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \neq 0$ y $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ son paralelos y están dirigidos del mismo modo (Fig. 1.1). Por lo tanto, la posición de cada vector en el plano es inmaterial; sólo son importantes su longitud y su dirección. Si así lo deseamos, puede suponerse que todos los vectores tienen el mismo punto inicial.

La suma de dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ se define como $\overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

como lo indica la Fig. 1.2. Si los dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ tienen el mismo punto inicial, entonces su suma es $\overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC},$$

donde $\overrightarrow{AC}$ es la diagonal del paralelogramo que tiene a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ como dos de sus lados (Fig. 1.3). Esto es cierto porque $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Si los puntos A, B , y C son colineales, entonces no hay paralelogramo asociado con la suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Dos casos posibles se muestran en las Figs. 1.4 y 1.5.*

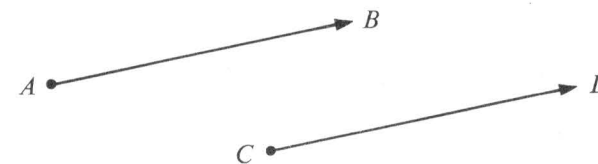


FIGURA 1.1

* En la Fig. 1.4 la suma resulta ser $\overrightarrow{AC}$ y en la Fig. 1.5 podemos colocar el origen del vector $\overrightarrow{AC}$ en B (recorriendo el vector paralelamente) y aplicando 1.2 obtener la suma deseada. (N. del R.)

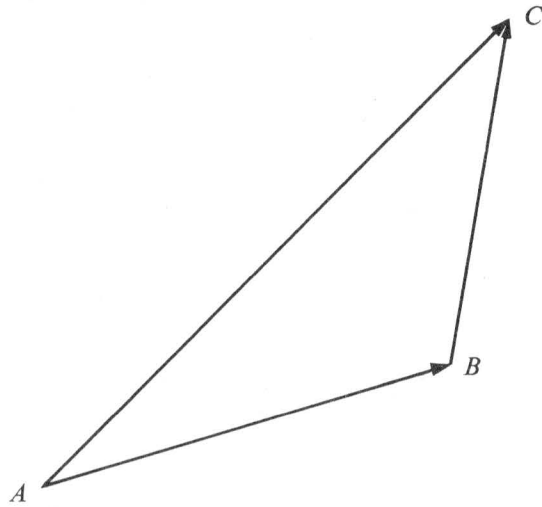


FIGURA 1.2

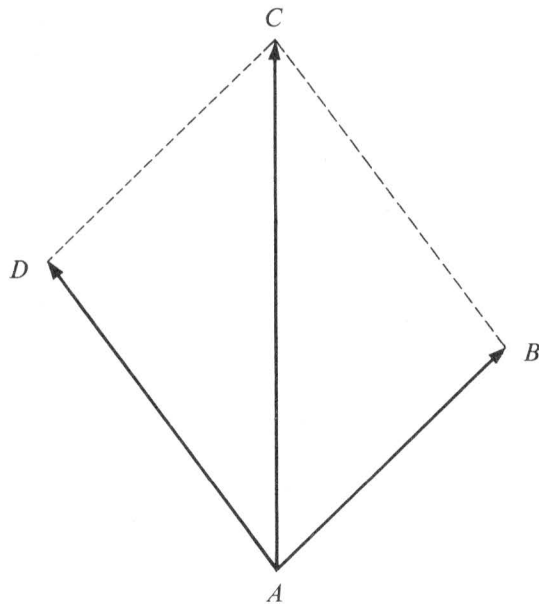


FIGURA 1.3

Que la suma vectorial es conmutativa se ilustra en la Fig. 1.6. Dados los vectores $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BC}$, seleccionamos el punto D de tal manera que $\mathbf{AB} = \mathbf{CD}$. Entonces $ABCD$ es un paralelogramo y

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}, \quad \mathbf{BC} + \mathbf{AB} = \mathbf{BC} + \mathbf{CD} = \mathbf{BD}.$$

Ya que $\mathbf{AC} = \mathbf{BD}$, hemos demostrado la *ley conmutativa*:

$$\mathbf{1.5} \quad \mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{BC} + \mathbf{AB} \text{ para todo } \mathbf{AB}, \mathbf{BC} \in V_2.$$

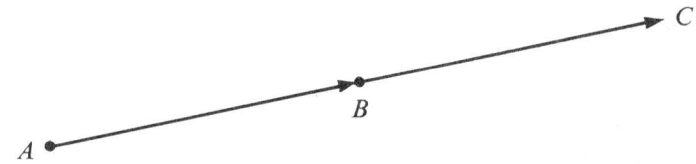


FIGURA 1.4

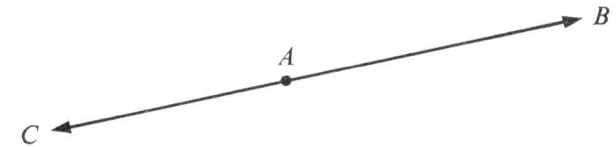


FIGURA 1.5

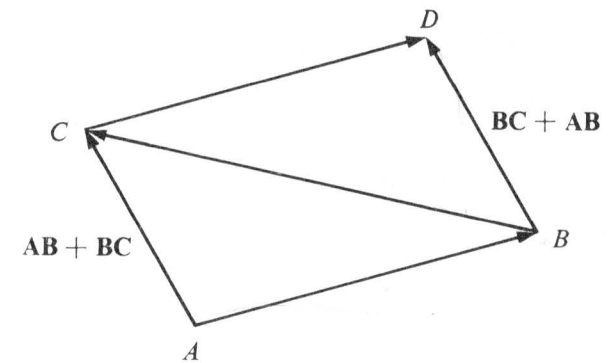


FIGURA 1.6

El lector debería dibujar una nueva figura para el caso especial en que A , B y C sean colineales.

Dados los tres vectores $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$ y $\mathbf{CD}$, tenemos

$$(\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) + \mathbf{CD} = \mathbf{AC} + \mathbf{CD} = \mathbf{AD},$$

$$\mathbf{AB} + (\mathbf{BC} + \mathbf{CD}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BD} = \mathbf{AD}.$$

Esto demuestra la *ley asociativa*:

1.6. $\mathbf{AB} + (\mathbf{BC} + \mathbf{CD}) = (\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) + \mathbf{CD}$ para toda $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CD} \in V_2$.

Dados cualesquiera n puntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ en E_2 tenemos evidentemente

$$\mathbf{1.7} \quad \mathbf{A_1A_2} + \mathbf{A_2A_3} + \dots + \mathbf{A_{n-1}A_n} = \mathbf{A_1A_n}.$$

Entendemos que la suma anterior se evalúa de izquierda a derecha. Por lo tanto, primero encontramos $\mathbf{A_1A_2} + \mathbf{A_2A_3} = \mathbf{A_1A_3}$, luego encontramos $\mathbf{A_1A_3} + \mathbf{A_3A_4} = \mathbf{A_1A_4}$ y así sucesivamente. Sin embargo, ya que la suma es conmutativa y asociativa, realmente no importa en qué orden sumemos los términos de 1.7.

Un vector que tiene el mismo punto como inicial y terminal se llama *vector cero* y se denota por $\mathbf{0}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{0} = \mathbf{AA}$$

para cada punto A en E_2 . No se considera que el vector $\mathbf{0}$ tenga alguna dirección particular. Evidentemente,

$$\mathbf{1.8} \quad \mathbf{AB} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{AB} = \mathbf{AB} \text{ para toda } \mathbf{AB} \in V_2.$$

Esto es, $\mathbf{0}$ es un *elemento de identidad aditivo* de V_2 .

Cada vector $\mathbf{AB}$ tiene un opuesto $\mathbf{BA}$ y

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = \mathbf{0}.$$

Llamamos a $\mathbf{BA}$ el *negativo* de $\mathbf{AB}$ y lo denotamos por $-\mathbf{AB}$,

$$\mathbf{BA} = -\mathbf{AB}.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{1.9} \quad \mathbf{AB} + (-\mathbf{AB}) = (-\mathbf{AB}) + \mathbf{AB} = \mathbf{0} \text{ para todo } \mathbf{AB} \in V_2.$$

Esto demuestra la *propiedad del inverso aditivo*.

La diferencia de dos vectores es dada por

$$\mathbf{AB} - \mathbf{AC} = \mathbf{CB},$$

ya que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} + \mathbf{CB}.$$

Por lo tanto $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ y $\mathbf{AB} - \mathbf{AC}$ son las dos diagonales del paralelogramo que tiene $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{AC}$ como lados adyacentes (Fig. 1.7).

Los resultados 1.5, 1.6, 1.8, y 1.9 pueden resumirse diciendo que la suma vectorial geométrica en V_2 tiene propiedades 1.1 (1)–(4) de suma en un espacio vectorial. Sin embargo, aún no podemos decir que V_2 es un espacio vectorial porque no se ha definido una operación de multiplicación escalar.

Definimos la multiplicación escalar en V_2 como sigue. Para cada vector $\mathbf{AB}$ y cada $r \in \mathbb{R}$, defínase

$$r\mathbf{AB}$$

como el vector cuya longitud es $|r| |\mathbf{AB}|$ y cuya dirección es (1) la misma que la de $\mathbf{AB}$ si $r > 0$, y (2) opuesta a la de $\mathbf{AB}$ si $r < 0$. Defínase también

$$0\mathbf{AB} = \mathbf{0}.$$

En otras palabras, si A , B y C son puntos colineales, entonces

$$r\mathbf{AB} = \mathbf{AC}, \text{ donde } |\mathbf{AC}| = |r| |\mathbf{AB}|,$$

donde $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{AC}$ tienen la misma dirección si $r > 0$, y direcciones opuestas si $r < 0$. Se dan algunos ejemplos en la Fig. 1.8.

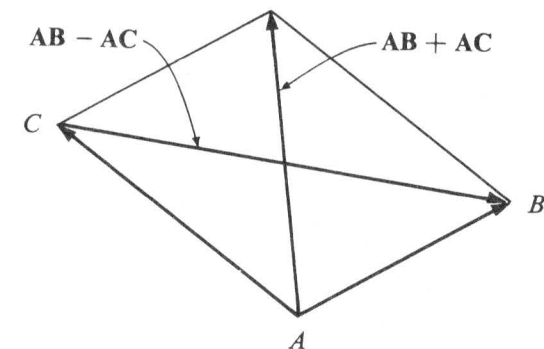


FIGURA 1.7

Si $\mathbf{AB}, \mathbf{BC} \in V_2$ y $r \in \mathbb{R}$, seleccionar los puntos B' y C' de tal modo que (Fig. 1.9)

$$\mathbf{AB}' = r\mathbf{AB}, \quad \mathbf{AC}' = r\mathbf{AC}.$$

Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes por los resultados de la geometría euclidiana, de tal modo que el lado $B'C'$ es paralelo a BC y tiene una longitud $|r|$ veces la longitud de BC . Por lo tanto,

$$\mathbf{B'C'} = r\mathbf{BC},$$

y

$$\mathbf{AB}' + \mathbf{B'C'} = r\mathbf{AB} + r\mathbf{BC} = \mathbf{AC}' = r\mathbf{AC} = r(\mathbf{AB} + \mathbf{BC}).$$

Por lo tanto hemos demostrado

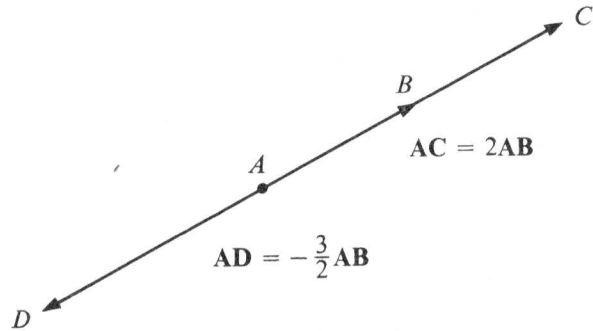


FIGURA 1.8

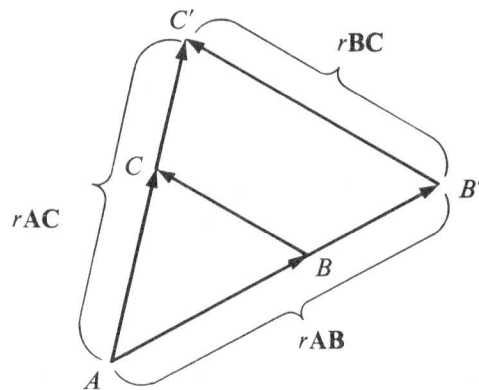


FIGURA 1.9

$$1.10 \quad r(\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) = r\mathbf{AB} + r\mathbf{BC} \text{ para todo } \mathbf{AB}, \mathbf{BC} \in V_2, r \in \mathbb{R}.$$

Si r y s son números positivos, se puede mostrar fácilmente que las dos propiedades siguientes se mantienen:

$$1.11 \quad (r + s)\mathbf{AB} = r\mathbf{AB} + s\mathbf{AB} \text{ para todo } \mathbf{AB} \in V_2, r, s \in \mathbb{R}.$$

$$1.12 \quad (rs)\mathbf{AB} = r(s\mathbf{AB}) \text{ para todo } \mathbf{AB} \in V_2, r, s \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto la ecuación

$$|r + s| |\mathbf{AB}| = |r| |\mathbf{AB}| + |s| |\mathbf{AB}|$$

indica que los vectores $(r + s)\mathbf{AB}$ y $r\mathbf{AB} + s\mathbf{AB}$ tienen la misma longitud y la ecuación

$$|rs| |\mathbf{AB}| = |r| |s| |\mathbf{AB}|$$

muestra que los vectores $(rs)\mathbf{AB}$ y $r(s\mathbf{AB})$ tienen la misma longitud. Evidentemente los cuatro vectores tienen la misma dirección que $\mathbf{AB}$. Por lo tanto 1.11 y 1.12 se cumplen si $r > 0$ y $s > 0$. Dejamos al lector la demostración de que también se cumplen si $r < 0$ o $s < 0$.

Por último, es evidente que

$$1.13 \quad 1\mathbf{AB} = \mathbf{AB} \text{ para todo } \mathbf{AB} \in V_2.$$

Los resultados 1.10-1.13 pueden resumirse diciendo que la multiplicación escalar en V_2 tiene propiedades 1.1(5)-(8) de multiplicación escalar en un espacio vectorial. Puesto que hemos observado ya que las propiedades 1.1(1)-(4) se verifican para V_2 , podemos establecer el siguiente resultado.

1.14. Teorema. V_2 es un espacio vectorial.

El hecho de que V_2 sea un espacio vectorial puede usarse para resolver problemas geométricos, como lo ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

Solución: Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea E el punto medio de la diagonal AC (Fig. 1.10). Ya que los lados opuestos de $ABCD$ son paralelos e iguales,

$$\mathbf{AB} = \mathbf{DC}.$$

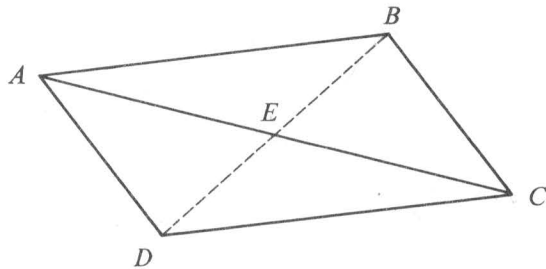


FIGURA 1.10

Ahora $\mathbf{AB} = \mathbf{AE} + \mathbf{EB}$, $\mathbf{DC} = \mathbf{DE} + \mathbf{EC}$, y $\mathbf{AE} = \mathbf{EC}$. Por lo tanto

$$\mathbf{AE} + \mathbf{EB} = \mathbf{AE} + \mathbf{DE}$$

y

$$\mathbf{EB} = \mathbf{DE}$$

por la ley de cancelación. Por lo tanto B , E , y D son colineales y E es el punto medio de $\mathbf{DB}$. Por lo tanto las diagonales se bisecan entre sí.

Ejemplo 2. Demuestre que el cuadrilátero formado al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero en orden es un paralelogramo.

Solución: Mirando a la Fig. 1.11, podemos observar que

$$\mathbf{AQ} = \frac{1}{2}\mathbf{PQ}, \quad \mathbf{QB} = \frac{1}{2}\mathbf{QR},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{AQ} + \mathbf{QB} = \frac{1}{2}\mathbf{PQ} + \frac{1}{2}\mathbf{QR} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{PQ} + \mathbf{QR}) = \frac{1}{2}\mathbf{PR}. \end{aligned}$$

De un modo semejante,

$$\mathbf{DS} = \frac{1}{2}\mathbf{PS}, \quad \mathbf{SC} = \frac{1}{2}\mathbf{SR}$$

y

$$\mathbf{DC} = \frac{1}{2}(\mathbf{PS} + \mathbf{SR}) = \frac{1}{2}\mathbf{PR}.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{AB} = \mathbf{DC}$$

y $ABCD$ es un paralelogramo.

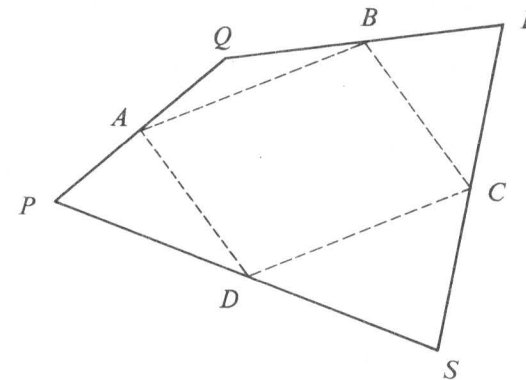


FIGURA 1.11

Todo lo que hicimos anteriormente en el plano euclidiano E_2 puede hacerse también en el espacio euclidiano E_3 . Si hacemos que V_3 sea el conjunto de todos los vectores en E_3 , entonces las propiedades 1.5–1.13 se satisfacen en V_3 por las mismas razones por las que se satisfacen en V_2 . Por lo tanto podemos concluir que:

1.15. Teorema. V_3 es un espacio vectorial.

Puede verificarse fácilmente que el Ej. 2 se sostiene inclusive si los puntos P , Q , R y S no son coplanares (esto es, no pertenecen a un mismo plano). La demostración es la misma, con cada vector tomado ahora en V_3 en lugar de V_2 . Las propiedades algebraicas de V_2 y V_3 son las mismas; esto es, son las propiedades de cualquier espacio vectorial. Sin embargo, distinguiremos entre estos espacios vectoriales después de introducir la dimensión de un espacio vectorial en el siguiente capítulo.

Si $\mathbf{x}$ es un vector no cero ya sea en V_2 o V_3 , entonces el subespacio $R_{\mathbf{x}}$ es una *línea*; esto es, $R_{\mathbf{x}}$ es el conjunto de todos los vectores a lo largo de una línea (recta) L de E_2 o E_3 (Fig. 1.12). Recordando que los vectores de V_2 y V_3 están libres, vemos que $R_{\mathbf{x}}$ consiste realmente de L y todas las líneas paralelas a L .

Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores no cero y no paralelos de V_2 o V_3 , entonces $R_{\mathbf{x}}$ y $R_{\mathbf{y}}$ son como se indica en la Fig. 1.13. Ya que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores libres, podemos exigir que tengan el mismo punto inicial. Esto es, las líneas K y L de la Fig. 1.13 se intersecan en un punto. Esto muestra geoméricamente que

$Rx \cap Ry = \{0\}$. Las líneas K y L determinan un plano p . Cada vector z en p es la diagonal de un paralelogramo que tiene dos lados en K y L , como está indicado en la Fig. 1.13, y por lo tanto,

$$z = ax + by \text{ para ciertas } a, b \in \mathbb{R}.$$

Recíprocamente, cada vector de la forma $ax + by$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ está en el plano p . Por lo tanto el subespacio

$$Rx + Ry$$

consiste de todos los vectores en el plano p . Si $x, y \in V_2$, entonces p debe ser todo el espacio E_2 ; esto es, $Rx + Ry = V_2$. Si $x, y \in V_3$, entonces $Rx + Ry$ es un subespacio propio de V_3 .

EJERCICIOS

1. Demuestre vectorialmente (por métodos vectoriales) que si las diagonales de un cuadrilátero en E_2 se bisecan entre sí, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
2. Si $\mathbf{AD}$ es la mediana dibujada desde A en un triángulo ABC , entonces demuestre que $\mathbf{AD}$ es el promedio aritmético de $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{AC}$ [esto es, $\mathbf{AD} = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC})$].
3. Demuestre vectorialmente que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero en E_3 se bisecan entre sí.
4. Demuestre vectorialmente que los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero en E_3 junto a los puntos medios de las dos diagonales son o bien colineales o los vértices de un paralelogramo.

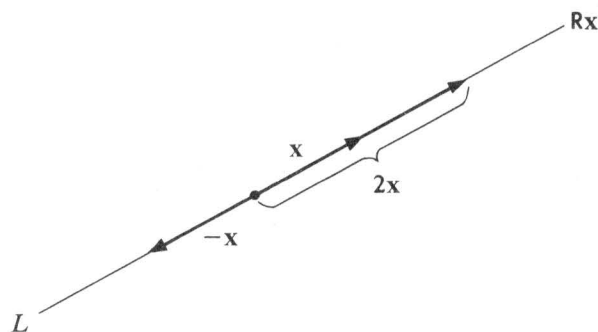


FIGURA 1.12

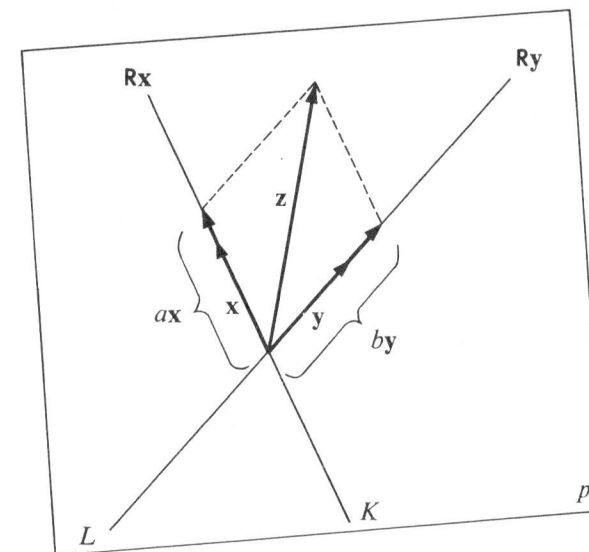


FIGURA 1.13

5. Si $ABCD$ es un paralelogramo en E_2 , y P es el punto medio del lado BC , pruebe vectorialmente que los segmentos AP y BD se encuentran en un punto de trisección de ambos.
6. El Ejercicio 5 puede generalizarse suponiendo que P se escoge en el lado BC de tal modo que $\mathbf{BP} = a\mathbf{BC}$, donde $0 < a \leq 1$. Demuestre vectorialmente que el punto de intersección de AP y BD divide a ambos segmentos en la misma razón y encuentre esta razón.

4. n -ADAS COMO VECTORES

Sea n un número entero positivo. Un conjunto ordenado

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

de n números reales se llama una n -ada de números reales. Los números reales $a_1, a_2, \dots, a_n$ se llaman las *coordenadas* de la n -ada. Dos n -adas son iguales si y sólo si tienen las mismas coordenadas:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ si y sólo si } a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$$

Denotaremos al conjunto de todas las n -adas de números reales por

$$\mathbb{R}_n.$$

Una operación de suma puede definirse en $\mathbb{R}_n$ "por coordenadas" como sigue:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Por cálculo directo podemos verificar fácilmente que las propiedades 1.1(1)–(4) se sostienen. Por lo tanto, si $\mathbf{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{y} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, y $\mathbf{z} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, entonces

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$$

$$= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, \dots, a_n + b_n + c_n),$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n).$$

También, si

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0),$$

entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

y si

$$-\mathbf{x} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

entonces

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0) = \mathbf{0}.$$

La multiplicación escalar puede definirse en $\mathbb{R}_n$ "por coordenadas" como sigue:

$$r(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n).$$

Verificamos que las propiedades 1.1(5)–(8) se mantienen para la multiplicación en $\mathbb{R}_n$ de la manera siguiente. Si r, s están en $\mathbb{R}$ y si $\mathbf{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{y} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ están en $\mathbb{R}_n$, entonces

$$r(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = r\mathbf{x} + r\mathbf{y} = (ra_1 + rb_1, ra_2 + rb_2, \dots, ra_n + rb_n),$$

$$(r + s)\mathbf{x} = r\mathbf{x} + s\mathbf{x} = (ra_1 + sa_1, ra_2 + sa_2, \dots, ra_n + sa_n),$$

$$(rs)\mathbf{x} = r(s\mathbf{x}) = (rsa_1, rsa_2, \dots, rsa_n),$$

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x} = (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2, \dots, 1 \cdot a_n).$$

Por lo tanto concluimos que:

1.16. Teorema. $\mathbb{R}_n$ es un espacio vectorial para todo número entero positivo n .

Los vectores que tienen $n - 1$ coordenadas 0 y la otra coordenada 1 son de especial significado en $\mathbb{R}_n$. Sea que

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

.

.

.

$$\mathbf{u}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

denoten estos vectores. Entonces para cualquier $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$a_1\mathbf{u}_1 = (a_1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$a_2\mathbf{u}_2 = (0, a_2, 0, \dots, 0, 0)$$

.

.

.

$$a_n\mathbf{u}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, a_n)$$

y

$$\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{u}_i = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Por lo tanto todo vector $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_n$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$:

$$\mathbf{1.17} \quad r\mathbf{u}_1 + r\mathbf{u}_2 + \dots + r\mathbf{u}_n = \mathbf{r}_n.$$

Es más difícil decidir si vectores que no sean los $\mathbf{u}_i$ generan a $\mathbb{R}_n$, como indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. ¿Generan a $\mathbb{R}_3$ los vectores

$$\mathbf{x}_1 = (-1, 2, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (3, 1, -1), \quad \mathbf{x}_3 = (1, 0, -1)?$$

Solución: Sea S el subespacio de R_3 generado por x_1 , x_2 , y x_3 :

$$S = Rx_1 + Rx_2 + Rx_3.$$

Si podemos demostrar que $u_1, u_2, u_3 \in S$, entonces se seguirá que $Ru_1 + Ru_2 + Ru_3 \subset S$ y $S = R_3$ por 1.17. Una manera de hacerlo es la siguiente. Sea

$$y_1 = 3x_1 + x_2 = (0, 7, -1),$$

$$y_2 = x_1 + x_3 = (0, 2, -1).$$

Entonces $y_1, y_2 \in S$, y por lo tanto $y_3 \in S$, donde

$$y_3 = 2y_1 - 7y_2 = (0, 0, 5).$$

Por lo tanto $u_3 = \frac{1}{5}y_3 \in S$. A su vez, $y_2 + u_3 = (0, 2, 0) \in S$ y $\frac{1}{2}(y_2 + u_3) = u_2 \in S$. Finalmente, $-x_1 + 2u_2 = u_1 \in S$. Concluimos que $S = R_3$.

Ejemplo 2. ¿Generan a R_3 los vectores

$$x_1 = (2, -2, 3), \quad x_2 = (3, -1, -5), \quad x_3 = (-1, -5, 27)?$$

Solución: Procediendo como en el Ej. 1, tenemos

$$y_1 = 3x_1 - 2x_2 = (0, -4, 19),$$

$$y_2 = x_1 + 2x_3 = (0, -12, 57),$$

y por lo tanto $y_1, y_2 \in S = Rx_1 + Rx_2 + Rx_3$. Desafortunadamente, $3y_1 = y_2$, de tal manera que no podemos concluir que $u_3 \in S$ como lo hicimos en el Ej. 1. Sospechamos que $u_3 \notin S$. Puesto que si $u_3 \in S$, entonces,

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = u_3 \text{ para algunas } a, b, c \in R.$$

Esto es,

$$(2a, -2a, 3a) + (3b, -b, -5b) + (-c, -5c, 27c) = (0, 0, 1)$$

y

$$(1) \quad \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ -2a - b - 5c = 0 \\ 3a - 5b + 27c = 1. \end{cases}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones de (1), obtenemos

$$2b - 6c = 0, \quad \text{o} \quad b = 3c.$$

Sumando -3 veces la primera ecuación de (1) a 2 veces la tercera ecuación, obtenemos

$$-19b + 57c = 2 \quad \text{o} \quad b = 3c - 2/19.$$

Ya que b no puede ser $3c$ y $3c - 2/19$, evidentemente el sistema (1) no tiene solución. Por lo tanto, $u_3 \notin S$, como sospechábamos. En consecuencia, los vectores x_1, x_2 y x_3 no generan R_3 .

EJERCICIOS

En cada uno de los Ejercicios 1-4 dígame si los vectores x_1, x_2 y x_3 generan o no a R_3 .

1. $x_1 = (1, 0, 0), x_2 = (1, 1, 0), x_3 = (1, 1, 1).$
2. $x_1 = (1, 0, -1), x_2 = (-1, 1, 0), x_3 = (1, 1, -2).$
3. $x_1 = (0, 1, 2), x_2 = (2, 0, 1), x_3 = (1, 2, 0).$
4. $x_1 = (1, 0, 0), x_2 = (0, 1, 0), x_3 = (1, -1, 0).$
5. Encuentre dos subespacios propios S_1 y S_2 de R_3 de tal modo que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ y $S_1 + S_2 = R_3$. Hágase lo mismo para R_4 .
6. Sea $v_1 = a_{11}u_1, v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \dots, v_n = a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{nn}u_n$ para algunos $a_{ij} \in R$, con $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0$. Demuestre que los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ generan a R_n .



CAPITULO 2

Bases de un Espacio Vectorial

1. INDEPENDENCIA

Los subespacios S_1 y S_2 de un espacio vectorial V se dice que son independientes si son subespacios propios y si $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Por ejemplo, R_x y R_y son subespacios independientes de V_3 si $x \neq 0$, $y \neq 0$, y los vectores x y y son no paralelos, esto es, $R_x \cap R_y = \{0\}$. De un modo más general, n subespacios de V son independientes si todos son propios y la intersección de cualquiera de ellos con la suma de los subespacios restantes es $\{0\}$, lo que enunciamos en seguida.

2.1. Definición de independencia. Un conjunto $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ de subespacios de un espacio vectorial V se llama *independiente*, y escribimos

$$\{S_1, S_2, \dots, S_n\}^\perp,$$

si y sólo si todo $S_i \neq \{0\}$ y

$$S_i \cap (S_1 + \dots + S_{i-1} + S_{i+1} + \dots + S_n) = \{0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Un conjunto de subespacios no independientes se llama un conjunto *dependiente*. Por lo tanto, si $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ es un conjunto dependiente, o bien $T_i = \{0\}$ o $T_i \cap (T_1 + \dots + T_{i-1} + T_{i+1} + \dots + T_n) \neq \{0\}$ para alguna i .

Un modo de establecer que un conjunto de subespacios es independiente es el siguiente.

2.2. Teorema. Sea $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ un conjunto de subespacios no cero de un espacio vectorial V y sea $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$. Entonces $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}^\perp$ si y sólo si todo $x \in S$ tiene una representación única de la forma

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \text{ para ciertos } x_i \in S_i.$$

Demostración: Si algún $x \in S$ tiene dos representaciones diferentes, digamos

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n,$$

donde $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in S_i$ y algún $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{y}_i$, digamos para mayor sencillez $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{y}_1$, entonces

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = (\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_3 - \mathbf{x}_3) + \dots + (\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n).$$

Ahora $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in S_1$, mientras $(\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_3 - \mathbf{x}_3) + \dots + (\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n) \in S_2 + S_3 + \dots + S_n$. Por lo tanto $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in S_1 \cap (S_2 + S_3 + \dots + S_n)$ y, como $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{0}$, $S_1 \cap (S_2 + S_3 + \dots + S_n) \neq \{\mathbf{0}\}$. Concluimos que el conjunto $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ es dependiente.

Recíprocamente, si $S_1 \cap (S_2 + S_3 + \dots + S_n) \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \dots + \mathbf{x}_n \neq \mathbf{0}$$

para algún $\mathbf{x}_i \in S_i$. Por lo tanto,

$$\mathbf{0} = (-\mathbf{x}_1) + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n,$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}$$

son dos representaciones diferentes del vector $\mathbf{0}$ como una suma de elementos de los S_i . Un argumento semejante puede hacerse si

$$S_i \cap (S_1 + \dots + S_{i-1} + S_{i+1} + \dots + S_n) \neq \{\mathbf{0}\}$$

para $i \neq 1$. Esto demuestra el Teorema 2.2.

Ejemplo 1. Sean $S_1 = \mathbb{R}(1, -1, 2) + \mathbb{R}(2, 1, 3)$ y $S_2 = \mathbb{R}(1, 0, -1)$ subespacios de $\mathbb{R}_3$. ¿Es $\{S_1, S_2\}^\perp$?

Solución: Como $S_1 \neq \{\mathbf{0}\}$ y $S_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, necesitamos averiguar solamente si $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$. Podemos lograrlo buscando a $a, b, c \in \mathbb{R}$ de tal modo que

$$a(1, -1, 2) + b(2, 1, 3) = c(1, 0, -1).$$

Mirando cada coordenada, vemos que a, b , y c deberán ser soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + 2b = c \\ -a + b = 0 \\ 2a + 3b = -c. \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $a = b$. Por lo tanto $3b = c$ de la primera ecuación y $5b = -c$ de la tercera. Sumando, obtenemos

$8b = 0$ y por lo tanto $b = 0, a = 0$, y $c = 0$. Concluimos que $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$ y por lo tanto que $\{S_1, S_2\}^\perp$.

Ejemplo 2. Sean $S_1 = \mathbb{R}(2, -1, 0)$, $S_2 = \mathbb{R}(3, 1, -1)$, y $S_3 = \mathbb{R}(1, -8, 3)$. ¿Es $\{S_1, S_2, S_3\}^\perp$ en $\mathbb{R}_3$?

Solución: Para averiguar si $S_1 \cap (S_2 + S_3) = \{\mathbf{0}\}$, resolvemos la ecuación

$$a(2, -1, 0) = b(3, 1, -1) + c(1, -8, 3),$$

o el sistema equivalente de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a = 3b + c \\ -a = b - 8c \\ 0 = -b + 3c. \end{cases}$$

Podemos mostrar fácilmente que $a = 5c$ y $b = 3c$ es una solución para cualquier c . Por lo tanto $S_1 \cap (S_2 + S_3) \neq \{\mathbf{0}\}$ y el conjunto $\{S_1, S_2, S_3\}$ es dependiente.

EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-6, ¿cuáles de los conjuntos de subespacios de $\mathbb{R}_3$ son independientes?

1. $\{S_1, S_2\}$, donde $S_1 = \mathbb{R}(1, 0, 0)$ y $S_2 = \mathbb{R}(1, 1, 0)$.
2. $\{S_1, S_2\}$, donde $S_1 = \mathbb{R}(1, -1, 0)$ y $S_2 = \mathbb{R}(2, 1, 1) + \mathbb{R}(1, 2, 1)$.
3. $\{S_1, S_2\}$, donde $S_1 = \mathbb{R}(1, 0, 1) + \mathbb{R}(-1, 1, 0)$ y $S_2 = \mathbb{R}(1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 1, -1)$.
4. $\{S_1, S_2, S_3\}$, donde $S_1 = \mathbb{R}(1, 0, 1)$, $S_2 = \mathbb{R}(0, 1, 0)$, y $S_3 = \mathbb{R}(0, 1, 1)$.
5. $\{S_1, S_2, S_3\}$, donde $S_1 = \mathbb{R}(2, 1, 2)$, $S_2 = \mathbb{R}(-1, 5, 3)$, y $S_3 = \mathbb{R}(7, -2, 3)$.
6. $\{S_1, S_2, S_3\}$, donde $S_1 = \mathbb{R}(1, -1, 5)$, $S_2 = \mathbb{R}(3, 4, -7)$, y $S_3 = \mathbb{R}(1, 2, 5)$.
7. Si $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}^\perp$, demuéstrese que todo subconjunto de

$$\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

es también independiente.

8. Si algún subconjunto de $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ es dependiente, demuéstrese que $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ es también dependiente.
9. Si el espacio vectorial V está generado por los n vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ y si $\{\mathbf{R}\mathbf{x}_1, \mathbf{R}\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{R}\mathbf{x}_n\}$ es un conjunto dependen-

te, pruébese entonces que V queda generado por ciertos $n - 1$ de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$.

10. Si $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}^\perp$ y S es un subespacio de V tal que $S \neq \{0\}$ y $S \cap (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = \{0\}$, demuéstrese entonces que $\{S, S_1, S_2, \dots, S_n\}^\perp$.

2. BASES

Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son vectores de un espacio vectorial V , es conveniente escribir

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}^\perp \text{ en lugar de } \{R\mathbf{x}_1, R\mathbf{x}_2, \dots, R\mathbf{x}_n\}^\perp$$

y llamar a los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ *linealmente independientes*. Por supuesto, si $\{R\mathbf{x}_1, R\mathbf{x}_2, \dots, R\mathbf{x}_n\}$ es un conjunto dependiente de subespacios, entonces llamamos a los vectores *linealmente dependientes*. El resultado siguiente es una consecuencia sencilla del 2.2.

2.3. Teorema. Los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ de V son linealmente independientes si y sólo si la única solución a la ecuación

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

es $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$.

Demostración: Si $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}^\perp$ y S es el subespacio de V generado por $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, entonces $\mathbf{0} \in S$ tiene la representación única

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \dots + 0\mathbf{x}_n$$

por 2.2. De ahí que $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$ es la única solución de (1). Recíprocamente, supóngase que la única solución de (1) es $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$. Si $\mathbf{x} \in S$ tiene representaciones

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \dots + b_n\mathbf{x}_n = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n,$$

entonces

$$\mathbf{0} = (b_1 - c_1)\mathbf{x}_1 + (b_2 - c_2)\mathbf{x}_2 + \dots + (b_n - c_n)\mathbf{x}_n.$$

Por lo tanto $b_1 - c_1 = 0, b_2 - c_2 = 0, \dots, b_n - c_n = 0$ y $b_1 = c_1, b_2 = c_2, \dots, b_n = c_n$. De ahí se sigue que $\mathbf{x}$ tiene una única representación de la forma $\sum b_i \mathbf{x}_i$ y que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}^\perp$ por 2.2. Esto demuestra 2.3.

2.4. Definición de base. Un conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ de vectores de un espacio vectorial V se llama una *base* de V si y sólo si los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes y generan a V .

Usando 2.2 vemos que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ es una base de V si y sólo si todo el vector $\mathbf{y}$ de V tiene una representación única de la forma

$$\mathbf{y} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_n\mathbf{x}_n$$

para ciertas $a_i \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1. Si $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{AC}$ son dos vectores cualesquiera no cero, no paralelos de V_2 , entonces $\{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}\}$ es una base de V_2 . Por lo tanto $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{AC}$ son independientes (¿por qué?), y cualquier otro vector $\mathbf{AD}$ de V_2 tiene la única forma

$$\mathbf{AD} = a\mathbf{AB} + b\mathbf{AC}$$

para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, como se indica en la Fig. 2.1.

Ejemplo 2. ¿Son $\mathbf{x}_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, -1, 1)$, y $\mathbf{x}_3 = (0, 2, 3)$ elementos de una base de $\mathbb{R}_3$?

Solución: Vemos que $\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 = (0, 1, -2)$ y de ahí que $2(\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_3 = (0, 0, -7)$ y $3(\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2) + 2\mathbf{x}_3 = (0, 7, 0)$. También, $\mathbf{x}_1 + \frac{1}{7}(0, 7, 0) = (2, 0, 0)$. Por lo tanto los vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$, y $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$ están en el espacio generado por $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$. De ahí se sigue que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ generan

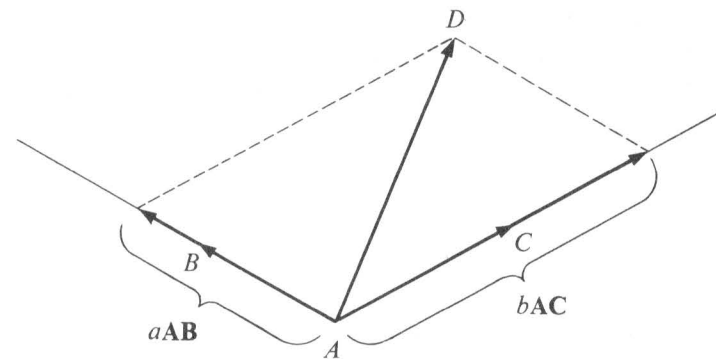


FIGURA 2.1

a R_3 . Para comprobar si $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ son linealmente independientes, resolvemos la ecuación

$$a(2, -1, 0) + b(1, -1, 1) + c(0, 2, 3) = (0, 0, 0)$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$. Esta ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \\ b + 3c = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto $b = -2a$ de la primera ecuación, $-a - (-2a) + 2c = 0$, o $a = -2c$, de la segunda ecuación, y $-2a + 3c = 0$, o $a = \frac{3}{2}c$, de la tercera ecuación. Evidentemente la única solución es $a = b = c = 0$. Por lo tanto, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}^\perp$ por 2.3, y $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ es una base de R_3 .

Como demostraremos a continuación, solamente es necesario hacer la mitad del trabajo del Ej. 2 para demostrar que un conjunto de tres vectores es una base de R_3 . Es decir, tenemos que demostrar ya sea que los tres vectores son linealmente independientes o que generan a R_3 . De un modo más general, demostraremos que cualesquiera n vectores linealmente independientes generan a R_n y que cualesquiera n vectores que generen a R_n son linealmente independientes.

Ejemplo 3. Demuestre que las tres medianas de un triángulo se encuentran en un punto P . Demuestre que P es un punto de trisección de cada mediana. El punto P se llama el *centroide* del triángulo.

Solución: En el triángulo ABC de la Fig. 2.2, D es el punto medio del lado BC , E el punto medio de AC , y P el punto de intersección de AD y BE . Por lo tanto,

$$\mathbf{AD} = \mathbf{AB} + \mathbf{BD} = \mathbf{AB} + \frac{1}{2}\mathbf{BC} = \mathbf{AB} + \frac{1}{2}(\mathbf{AC} - \mathbf{AB})$$

y

$$\mathbf{AD} = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}).$$

De un modo semejante,

$$\mathbf{BE} = \frac{1}{2}(\mathbf{BA} + \mathbf{BC}).$$

Ya que P está en $\mathbf{AD}$ y en $\mathbf{BE}$,

$$\mathbf{AP} = r\mathbf{AD}, \quad \mathbf{BP} = s\mathbf{BE} \text{ para ciertas } r, s \in \mathbb{R}.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} \mathbf{BP} &= \mathbf{BA} + \mathbf{AP} = \mathbf{BA} + \frac{r}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) \\ &= \mathbf{BA} + \frac{r}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{AB} + \mathbf{BC}) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(1) \quad \mathbf{BP} = (1 - r)\mathbf{BA} + \frac{r}{2}\mathbf{BC}.$$

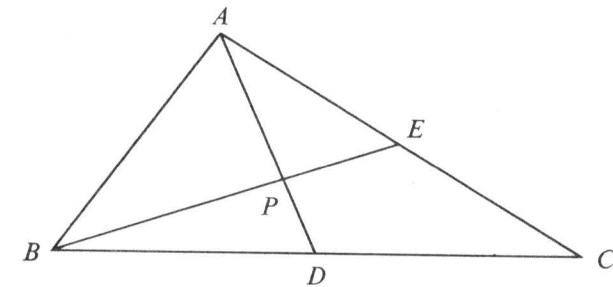


FIGURA 2.2

Sin embargo, $\mathbf{BP}$ se da también por $\mathbf{BP} = s\mathbf{BE}$ o

$$(2) \quad \mathbf{BP} = \frac{s}{2}\mathbf{BA} + \frac{s}{2}\mathbf{BC}.$$

Como $\{\mathbf{BA}, \mathbf{BC}\}^\perp$, obtenemos de (1) y (2) que

$$1 - r = \frac{s}{2}, \quad \frac{r}{2} = \frac{s}{2}.$$

De ahí

$$r = s = \frac{2}{3}.$$

Esto demuestra que P es el punto de trisección de AD y BE más alejado de cada vértice. Como AD y BE son dos medianas cualesquiera del triángulo, se sigue que las tres medianas se encuentran en el punto de trisección de cada mediana más alejado del vértice correspondiente.

EJERCICIOS

En cada uno de los siguientes ejercicios demuestre que el conjunto de vectores es linealmente independiente y diga si es una base del espacio vectorial dado.

1. $\{(1, 1), (1, -1)\}$ en $\mathbb{R}_2$.
2. $\{(2, -3)\}$ en $\mathbb{R}_2$.
3. $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ en $\mathbb{R}_3$.
4. $\{(2, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 1, 0)\}$ en $\mathbb{R}_3$.
5. $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}_4$.
6. $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ en $\mathbb{R}_4$.
7. $\{(0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}_5$.
8. $\{u_1, u_1 + 2u_2, u_1 + 2u_2 + 3u_3, \dots, u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n\}$ en $\mathbb{R}_n$, donde las u_i son como se definen en la Pág. 27.

3. DIMENSION

Antes de definir lo que queremos decir con dimensión de un espacio vectorial, demostremos las siguientes propiedades de reemplazo.

2.5. Propiedad de reemplazo de una base. Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de un espacio vectorial V y sea y un vector no cero de V .
Si

$$(1) \quad y = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

entonces $a_i \neq 0$, para alguna i , y si $a_k \neq 0$, entonces

$$\{x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n\}$$

es también una base de V .

Demostración: Podemos despejar x_k en (1), obteniendo

$$x_k = -\frac{1}{a_k} (a_1 x_1 + \dots + a_{k-1} x_{k-1} + a_{k+1} x_{k+1} + \dots + a_n x_n - y).$$

Como x_k es una combinación lineal de los otros x_i y y , todo x_j es una combinación lineal de los otros x_i y y . En consecuencia,

$$V = Rx_1 + \dots + Rx_{k-1} + Ry + Rx_{k+1} + \dots + Rx_n.$$

Por lo tanto, sólo necesitamos demostrar que $\{x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n\}^\perp$ para demostrar 2.5. Si

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{k-1} b_i x_i + by + \sum_{i=k+1}^n b_i x_i = 0$$

para algunas $b, b_i \in \mathbb{R}$ y $b = 0$, entonces toda $b_i = 0$ ya que $\{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\}^\perp$ Si $b \neq 0$, podemos resolver (2) para y , obteniendo

$$(3) \quad y = -\frac{1}{b} \left(\sum_{i=1}^{k-1} b_i x_i + \sum_{i=k+1}^n b_i x_i \right).$$

Ahora (1) y (3) deberían ser las mismas, ya que la representación de y como una combinación lineal de $x_1, x_2, \dots, x_n$ es única por 2.2. Evidentemente (1) y (3) no son iguales, puesto que $a_k \neq 0$ en (1), y en cambio el coeficiente de x_k es 0 en (3). Esta contradicción indica que $b = 0$ y por lo tanto, toda $b_i = 0$ en (2). Por lo tanto,

$$\{x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n\}^\perp$$

y se demuestra 2.5.

Podemos extender la propiedad de reemplazo a diferentes vectores como sigue:

2.6. Propiedad de reemplazo extendida (de una base). Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de un espacio vectorial V y sean $y_1, y_2, \dots, y_k$ k vectores linealmente independientes cualesquiera de V . Entonces necesariamente $k \leq n$ y V tiene una base compuesta de las k y_i y $n - k$ de las x_i .

Demostración: Si $k = 1$, entonces 2.6 es simplemente 2.5. Supóngase que $1 \leq m < k$ y que hay una base de V de la forma $\{y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_{n-m}\}$, donde $\{z_1, \dots, z_{n-m}\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}$. Ahora y_{m+1} es una combinación lineal de esta base,

$$y_{m+1} = \sum_{i=1}^m a_i y_i + \sum_{i=1}^{n-m} b_i z_i,$$

con algún $a_i \neq 0$ o $b_i \neq 0$. No pueden ser todos los $b_i = 0$, porque entonces algunas $a_i \neq 0$ y $Ry_{m+1} \cap (Ry_1 + \dots + Ry_m) \neq \{0\}$ contrario a $\{y_1, \dots, y_{m+1}\}^\perp$. Por lo tanto, por 2.5 podemos sustituir algún z_i por y_{m+1} para obtener una nueva base de V de la forma $\{y_1, \dots, y_{m+1}, w_1, \dots, w_{n-m-1}\}$, donde $\{w_1, \dots, w_{n-m-1}\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}$. Continuando este proceso de insertar una y_i más en una

base de V , encontraremos una base con n elementos, k de los cuales son $y_1, y_2, \dots, y_k$. En consecuencia, $k \leq n$ y se ha demostrado 2.6.

Hay muchas bases de un espacio vectorial V . Sin embargo, si $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ son dos bases de V , entonces, haciendo en 2.6 que las u_i sean x y las v_i sean y , resulta que $s \leq r$. Intercambiando las funciones de las u_i y v_i , tenemos $r \leq s$. Por lo tanto, $r = s$. Esto es, el número de vectores en una base de V es uno *invariante* de V ; en otras palabras, si una base de V tiene r elementos, entonces todas las bases de V tienen r elementos.

2.7. Definición de dimensión. Si un espacio vectorial V tiene n elementos en una base, n se llamará la *dimensión* de V y escribimos

$$\dim V = n.$$

Hay espacios vectoriales que tienen un número infinito de elementos en una base, pero no consideraremos dichos espacios en este libro.

Debido a la propiedad de reemplazo extendida, todo conjunto de n vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V de n dimensiones es una base. Asimismo, todo conjunto que contenga más de n vectores es dependiente. Por 2.7, cualquier conjunto de vectores linealmente independientes de V puede extenderse a una base de V . Se dice que el subespacio $\{0\}$ de todo espacio vectorial tiene dimensión 0.

El espacio vectorial V_2 tiene una base consistente de dos vectores, como lo indica el Ej. 1, Pág. 27. Por lo tanto $\dim V_2 = 2$. Si x_1, x_2 , y x_3 son tres vectores no coplanares cualesquiera de V_3 , entonces son linealmente independientes (¿por qué?) y generan a V_3 . Por lo tanto cualquier $x \in V_3$ es una combinación lineal

$$x = ax_1 + bx_2 + cx_3$$

de x_1, x_2 , y x_3 , como se señala en la Fig. 2.3. De ahí se sigue que $\dim V_3 = 3$, como esperábamos.

Los vectores $u_1, u_2, \dots, u_n$ de R_n definidos en la Pág. 27 son linealmente independientes y generan a R_n . Por lo tanto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base de R_n , y concluimos que

$$\dim R_n = n$$

para todo n entero positivo.

Ejemplo 1. Extienda el conjunto $\{(1, -1, 1), (4, 3, -3)\}$ a una base de R_3 .

Solución: Los vectores $(1, -1, 1)$ y $(4, 3, -3)$ son linealmente independientes ya que $R(1, -1, 1) \cap R(4, 3, -3) = \{0\}$. Por lo tanto estos dos vectores con un vector más, forman una base de R_3 . Podemos escoger este tercer vector más o menos al azar, cerciorándonos únicamente de que no esté en $R(1, -1, 1) + R(4, 3, -3)$. En particular, podemos usar por lo menos uno de los u_i en vista del 2.6 y debido al hecho de que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de R_3 . No podemos usar $u_1 = (1, 0, 0)$, ya que $u_1 \in R(1, -1, 1) + R(4, 3, -3)$,

$$u_1 = \frac{3}{7}(1, -1, 1) + \frac{1}{7}(4, 3, -3).$$

Ahora $\{(1, -1, 1), (4, 3, -3), (0, 1, 0)\}^\perp$, porque

$$a(1, -1, 1) + b(4, 3, -3) + c(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

si y sólo si

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ -a + 3b + c = 0 \\ a - 3b = 0, \end{cases}$$

o $a = b = c = 0$. Por lo tanto $\{(1, -1, 1), (4, 3, -3), (0, 1, 0)\}$ es una base de R_3 . Puede señalarse que $\{(1, -1, 1), (4, 3, -3), (0, 0, 1)\}$ es también una base de R_3 .

Ejemplo 2. Si $x_1 = (1, 0, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0, 0)$, $x_3 = (1, 1, 1, 0)$, $x_4 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Es entonces $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ una base de R_4 ?

Solución: La única solución de la ecuación

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = (0, 0, 0, 0)$$

es, claramente, $a = b = c = d = 0$. Por lo tanto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^\perp$ por 2.3. Como $\dim R_4 = 4$, todo conjunto de cuatro vectores linealmente independiente es una base. Por lo tanto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ es una base de R_4 .

Ejemplo 3. Demuéstrese que los vectores que unen a cada vértice de un tetraedro al centroide de la cara opuesta se encuentran en un punto P . ¿Divide P a cada uno de estos vectores en la misma razón? Si es así, ¿cuál es la razón? El

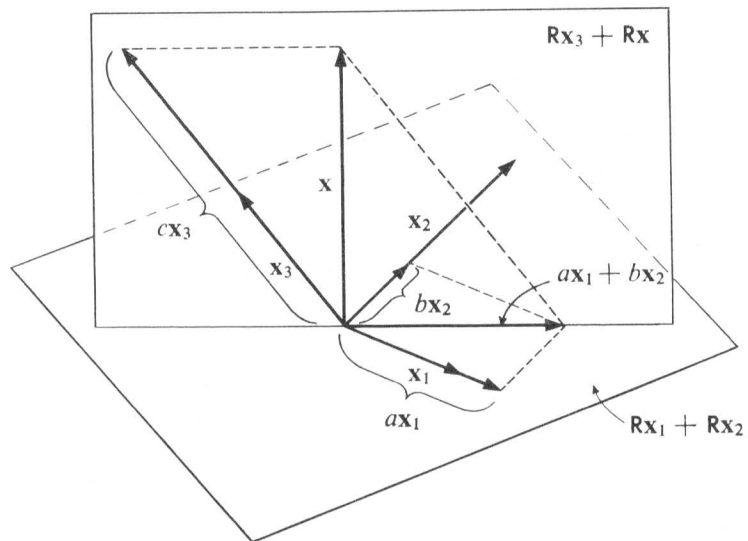


FIGURA 2.3

punto P se llama el *centroide* del tetraedro. (Véase el Ej. 3, Pág. 36, para un problema semejante.)

Solución: Sean $ABCD$ un tetraedro (Fig. 2.4), E , centroide de la cara BCD , F el centroide de la cara ABD , y P el punto de intersección de AE y CF . Entonces

$$CE = \frac{2}{3}CH = \frac{1}{3}(CB + CD)$$

por el Ej. 3, Pág. 36, y de un modo semejante

$$AF = \frac{1}{3}(AB + AD).$$

Ahora

$$\begin{aligned} AE &= AC + CE = AC + \frac{1}{3}(CB + CD) \\ &= AC + \frac{1}{3}(CA + AB + CA + AD) \\ &= \frac{1}{3}(AB + AC + AD) \end{aligned}$$

y de un modo semejante

$$CF = \frac{1}{3}(CA + CB + CD).$$

Como el punto P está en AE y CF ,

$$AP = rAE, \quad CP = sCF \text{ para algunas } r, s \in \mathbb{R}.$$

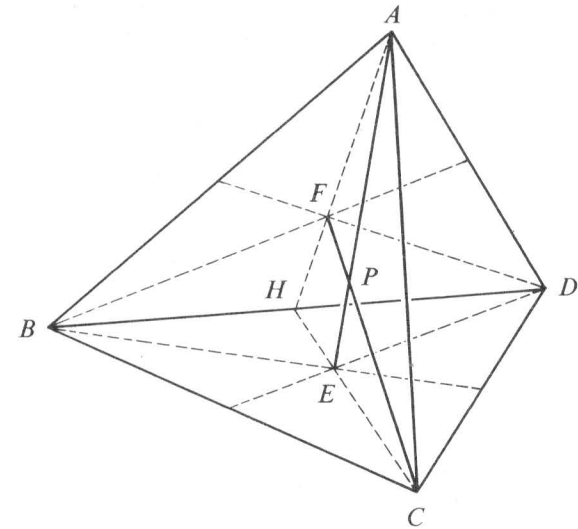


FIGURA 2.4

De ahí que

$$(1) \quad AP = \frac{r}{3}AB + \frac{r}{3}AC + \frac{r}{3}AD.$$

También,

$$AP = AC + CP$$

$$= AC + \frac{s}{3}(CA + CB + CD)$$

$$= AC + \frac{s}{3}(CA + CA + AB + CA + AD)$$

y

$$(2) \quad AP = \frac{s}{3}AB + (1-s)AC + \frac{s}{3}AD.$$

Los vectores AB , AC , y AD son no coplanares y por lo tanto forman una base de V_3 . En consecuencia, las dos representaciones de AP en (1) y (2) anteriores deben coincidir; esto es,

$$\frac{r}{3} = \frac{s}{3}, \quad \frac{r}{3} = 1-s, \quad \frac{r}{3} = \frac{s}{3}.$$

Por lo tanto

$$r = s = \frac{3}{4}.$$

Esto demuestra que el punto P divide a cada uno de los segmentos AE y CF en la misma razón de $3/4$:

$$AP = \frac{3}{4}AE, \quad CP = \frac{3}{4}CF.$$

Como AE y CF eran dos medianas cualesquiera del tetraedro, se concluye que las cuatro medianas se encuentran en el mismo punto P a tres cuartos de la distancia desde el vértice a la cara.

EJERCICIOS

En cada uno de los Ejercicios 1–8 demuestre que el conjunto de vectores es linealmente independiente y luego extienda cada conjunto, si es necesario, a una base del espacio vectorial dado.

1. $\{(1, 1), (4, -4)\}$ en R_2 .
2. $\{(1, 2, 3), (2, 3, 1)\}$ en R_3 .
3. $\{(-1, 5, -5), (0, 5, -5), (0, 0, -5)\}$ en R_3 .
4. $\{(1, -1, 1, -1), (-1, 1, 1, -1)\}$ en R_4 .
5. $\{(1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ en R_4 .
6. $\{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\}$ en R_4 .
7. $\{(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0)\}$ en R_5 .
8. $\{(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 0)\}$ en R_5 .
9. Describa un espacio vectorial de una dimensión.
10. Sea V un espacio de n dimensiones y sea S un subespacio, $S \neq \{0\}$. Demuestre que $\dim S = k \leq n$, con $\dim S = n$ si y sólo si $S = V$.
11. Sea V un espacio vectorial de n dimensiones. Demuéstrese que para todo subespacio S de V existe un subespacio S' tal que $S \cap S' = \{0\}$ y $S + S' = V$. (Llamamos a S' un *complemento* de S). Demuéstrese que S' no es único si S es un subespacio propio.
12. Demuestre que algún subconjunto de cualquier conjunto de generadores de V es realmente una base de V .

En cada uno de los Ejercicios 13–15 demuéstrese que el conjunto de vectores es un conjunto de generadores del espacio vectorial dado. Encuentre un subconjunto del conjunto que sea una base.

13. $\{(1, -1), (-3, 3), (2, 1)\}$ en R_2 .
14. $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ en R_3 .
15. $\{(1, -1, 1, -1), (-1, 1, -1, 1), (2, -1, 2, -1), (-3, 1, -3, 1)\}$

$$(1, 1, -2, -2), (2, 2, -1, -1), (1, -2, -2, 1)\} \text{ en } R_4.$$

16. Si S y T son subespacios de un espacio vectorial V de n dimensiones demuestre entonces que

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

[Sugerencia: Si $S \cap T \neq \{0\}$, extienda una base $\{x_1, \dots, x_k\}$ de $S \cap T$ a una base $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m\}$ de S y a una base $\{x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_t\}$ de T . Demuestre que $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_t\}$ es una base de $S + T$. Modifique ligeramente el argumento si $S \cap T = \{0\}$.]

4. HOMOMORFISMOS

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces se usará la notación

$$A \xrightarrow{f} B$$

para indicar que f es un *mapeo** del conjunto A en el conjunto B . Por lo tanto, hay un único elemento de B correspondiendo a cada $a \in A$, denotado por $f(a)$. En el lenguaje de funciones, f es una función cuyo dominio es A y cuyo rango es B .

2.8. Definición de homomorfismo. Si V y W son espacios vectoriales y $V \xrightarrow{f} W$ es una función, entonces f se llama un homomorfismo si y sólo si

- (1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in V$.
- (2) $f(ax) = af(x)$ para todo $x \in V, a \in R$.

De acuerdo con esta definición, las sumas en V se transforman en sumas en W , y la multiplicación escalar es conservada por un homomorfismo.

Si $V \xrightarrow{f} W$ es un homomorfismo, entonces

$$0 + f(x) = f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$$

y $0 = f(0)$ por la ley de cancelación. Esto es, el vector cero

* En México ha sido aceptado por algunas personas el término no castellano "mapeo" como adaptación del "mapping". Como dicho término tiene la misma significación (salvo matices sin importancia para nosotros) que las palabras "función" y "transformación" vamos en lo que sigue a limitarnos al uso de estas últimas. (N. del R.)

de V se transforma por f en el vector cero de W . Si hacemos que $a = -1$ en 2.8(2), obtenemos

$$f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \in V.$$

Podemos extender 2.8(1) a más de dos sumandos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} f(x + y + z) &= f[(x + y) + z] \\ &= f(x + y) + f(z) \\ &= f(x) + f(y) + f(z). \end{aligned}$$

De un modo más general, si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son vectores de V y $a_1, a_2, \dots, a_n$ son escalares, entonces

$$2.9 \quad f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

Detallando,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) &= \sum_{i=1}^n f(a_i x_i) \quad \text{por 2.8(1)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \quad \text{por 2.8(2)}. \end{aligned}$$

Si $V \xrightarrow{f} W$ es un homomorfismo, entonces llamamos a V el *dominio* de f ,

$$V = \text{dom } f,$$

y llamamos al subconjunto de W en el que se transforma V , la *imagen* de f ,

$$\text{im } f = \{f(x) \mid x \in V\}.$$

Resulta evidente por 2.9 que $\text{im } f$ es un subespacio de W .

Se dice que una función (o transformación) $V \xrightarrow{f} W$ es una *función 1-1* si elementos distintos de V se transforman en elementos distintos de W ; esto es, cuando $x \neq y$ en V , entonces $f(x) \neq f(y)$ en W .

2.10. Definición de un isomorfismo. Un homomorfismo $V \xrightarrow{f} W$ se llama un *isomorfismo* si y sólo si f es una función 1-1 e $\text{im } f = W$.

Dos espacios vectoriales V y W se llaman *isomorfos* si existe un isomorfismo $V \xrightarrow{f} W$ (o $W \xrightarrow{g} V$).

2.11. Teorema. Dos espacios vectoriales V y W de dimensión finita son isomorfos si y sólo si $\dim V = \dim W$.

Demostración: Sea $V \xrightarrow{f} W$ un isomorfismo y sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base de V . Como $\text{im } f = W$, cada vector en W tiene la forma $f(y)$ para alguna $y \in V$. Si

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

entonces

$$f(y) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

por 2.9. Por lo tanto $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ es un conjunto de generadores de W . ¿Es un conjunto independiente? Para contestar a esta pregunta, supongamos

$$\sum_{i=1}^n b_i f(x_i) = 0.$$

Entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i\right) = f(0) \quad y \quad \sum_{i=1}^n b_i x_i = 0$$

ya que f es una función 1-1. Los vectores $x_1, x_2, \dots, x_n$ son linealmente independientes y por lo tanto $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_n = 0$ por 2.3. A su vez, esto demuestra que los vectores $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ son linealmente independientes. En consecuencia, $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ es una base de W y $\dim V = \dim W$.

Recíprocamente, supongamos que $\dim V = \dim W = n$, y sean $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases de V y W , respectivamente. Definamos la función f por

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i v_i \text{ para todo } a_i \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, por definición, $\text{dom } f = V$ e $\text{im } f = W$. Si $x, y \in V$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^n b_i u_i, \quad y = \sum_{i=1}^n c_i u_i$$



para ciertas $b_i, c_i \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \mathbf{u}_i$$

y

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i \\ &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

De un modo semejante, para toda $a \in \mathbb{R}$,

$$a\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n ab_i \mathbf{u}_i$$

y

$$\begin{aligned} f(a\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n ab_i \mathbf{v}_i \\ &= a \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{v}_i \\ &= a f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es un homomorfismo. Siempre que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, entonces $b_i \neq c_i$ para alguna i al menos, en las representaciones anteriores de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, y por lo tanto $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$. Por lo tanto, f es un isomorfismo y se ha demostrado 2.11.

Los espacios vectoriales isomorfos son algebraicamente idénticos. Eso es, aquellas propiedades que implican solamente suma y multiplicación escalar son exactamente las mismas en dos espacios vectoriales isomorfos. Por lo tanto dos espacios vectoriales que tengan la misma dimensión son algebraicamente idénticos, de acuerdo con 2.11. En otras palabras, si $\dim V = \dim W$, entonces el único modo por el que podemos distinguir entre V y W es por la naturaleza de sus elementos, no por medios matemáticos.

Los espacios vectoriales V_2 y $\mathbb{R}_2$ son de dos dimensiones y por lo tanto isomorfos. De un modo semejante, los espacios vectoriales V_3 y $\mathbb{R}_3$ son isomorfos, ambos siendo de tres dimensiones.

El isomorfismo entre V_2 y $\mathbb{R}_2$ puede llevarse a cabo como sigue. Primero escójase un sistema coordenado rectangular en E_2 .

Entonces los puntos extremos de cada vector tienen coordenadas que determinan al vector de manera única. Un vector, tal como $\mathbf{OC}$ en la Fig. 2.5, que tiene su punto inicial en el origen se llama *vector de posición*. Cualquier otro vector $\mathbf{AB}$ puede compararse a un vector de posición, seleccionando nuevos ejes x' y y' que tengan la misma dirección que los ejes x y y respectivamente, y teniendo a A como nuevo origen (Fig. 2.5). Si A, B y C tienen coordenadas respectivas (a_1, a_2) , (b_1, b_2) y (c_1, c_2) , evidentemente $\mathbf{AB} = \mathbf{OC}$ si y sólo si $c_1 = b_1 - a_1$ y $c_2 = b_2 - a_2$. En función de los elementos de V_2 y $\mathbb{R}_2$,

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OC} \text{ si y sólo si } (c_1, c_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Dado un vector $\mathbf{AB}$ cuyos puntos inicial y terminal tienen las coordenadas (a_1, a_2) y (b_1, b_2) , respectivamente, llamaremos a la pareja ordenada de números $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ las *componentes* de $\mathbf{AB}$. Las componentes de un vector de posición $\mathbf{OC}$ son sencillamente las coordenadas de su punto terminal C . Resulta evidente de nuestra anterior discusión que dos vectores de V_2 son iguales si y sólo si tienen las mismas componentes.

Tenemos ahora un modo natural de transformar V_2 en $\mathbb{R}_2$,

$$V_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}_2, \text{ donde } f(\mathbf{x}) = (c_1, c_2), \text{ las componentes de } \mathbf{x}.$$

Si $f(\mathbf{x}) = (a_1, a_2)$ y $f(\mathbf{y}) = (b_1, b_2)$, entonces

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

puesto que los lados opuestos del cuadrilátero $OACB$ de la Fig. 2.6 tienen las mismas componentes y por lo tanto son iguales. Como $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2)$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}_2$, hemos demostrado que

$$(1) \quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}).$$

Si el vector $\mathbf{x}$ tiene las componentes (a_1, a_2) , el vector $r\mathbf{x}$ tiene las componentes (ra_1, ra_2) para todo $r \in \mathbb{R}$. Así, en la Fig. 2.7

$$d(O, A) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad d(O, B) = \sqrt{r^2 a_1^2 + r^2 a_2^2} = |r| d(O, A),$$

y las direcciones de $\mathbf{OA}$ y $\mathbf{OB}$ son las mismas si $r > 0$ y opuestas si $r < 0$. Como $(ra_1, ra_2) = r(a_1, a_2)$ en $\mathbb{R}_2$,

$$(2) \quad f(r\mathbf{x}) = r(a_1, a_2) = rf(\mathbf{x}).$$

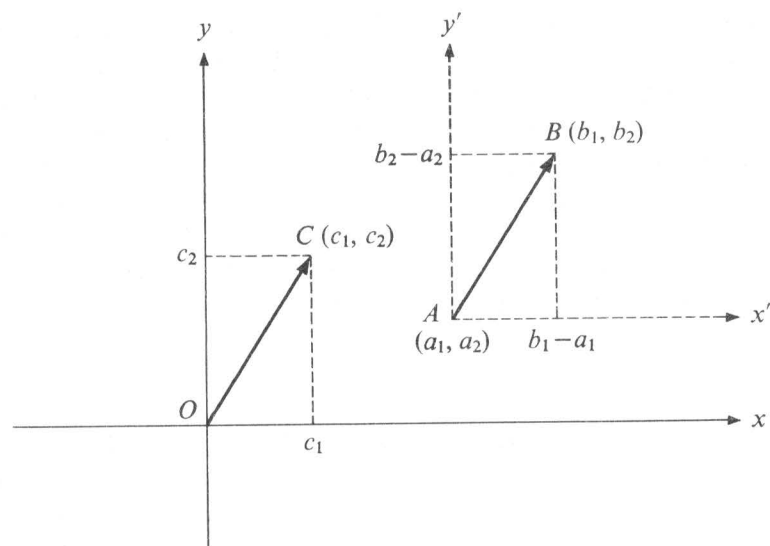


FIGURA 2.5

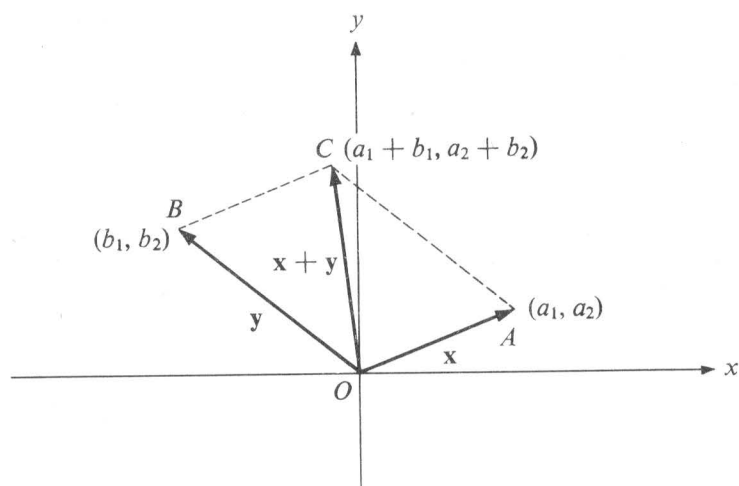


FIGURA 2.6

Ahora (1) y (2) son precisamente las dos propiedades de un homomorfismo (2.8). Como f es una función 1-1 e $\text{im } f = R_2$, f es realmente un isomorfismo.

Los razonamientos anteriores para construir el isomorfismo entre V_2 y R_2 pueden aplicarse sin alteración al caso de V_3 y

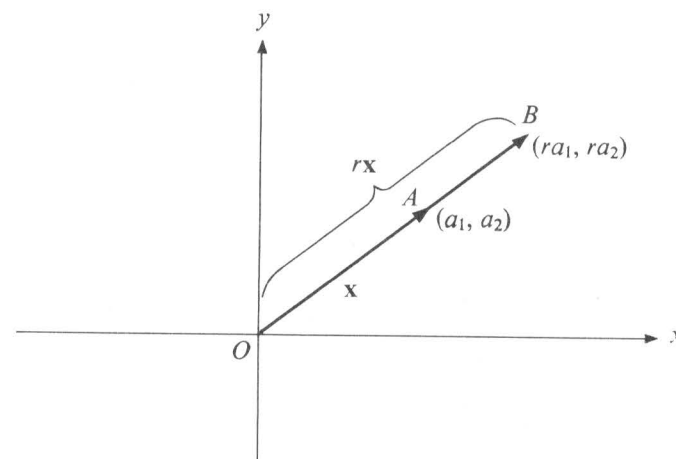


FIGURA 2.7

R_3 . De este modo escogemos un sistema de coordenadas rectangulares en E_3 de tal modo que el vector $\mathbf{AB}$ tiene las coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) para su punto inicial A y punto terminal B , respectivamente. Si llamamos a $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ las *componentes* de $\mathbf{AB}$, entonces dos vectores de V_3 son iguales si y sólo si tienen las mismas componentes. La función f definida por

$$V_3 \xrightarrow{f} R_3, \quad f(\mathbf{x}) = (c_1, c_2, c_3), \text{ las componentes de } \mathbf{x},$$

resulta ser un isomorfismo de exactamente la misma manera en que resulta para V_2 y R_2 .

La función $V_2 \xrightarrow{f} R_2$ transforma a los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ de la Fig. 2.8 a $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$, respectivamente, de R_2 ,

$$f(\mathbf{i}) = \mathbf{u}_1, \quad f(\mathbf{j}) = \mathbf{u}_2.$$

Para toda $\mathbf{x} \in V_2$ con componentes (a_1, a_2) , tenemos

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}, \quad f(\mathbf{x}) = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2,$$

como se indica en la Fig. 2.8. Esto es, el isomorfismo f transforma la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ de V_2 en la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de R_2 .

Del mismo modo, la función $V_3 \xrightarrow{f} R_3$ transforma a los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ de la Fig. 2.9 a los vectores

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$$

de R_3 :

$$f(\mathbf{i}) = \mathbf{u}_1, \quad f(\mathbf{j}) = \mathbf{u}_2, \quad f(\mathbf{k}) = \mathbf{u}_3.$$

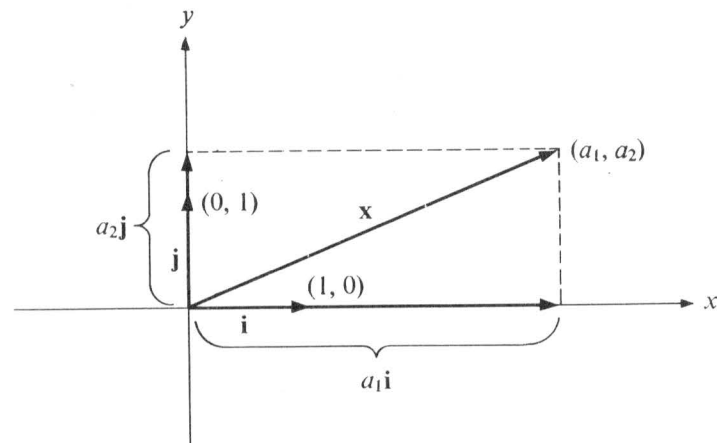


FIGURA 2.8

Si $\mathbf{x} \in V_3$ tiene componentes (a_1, a_2, a_3) , entonces

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad f(\mathbf{x}) = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3,$$

como se indica en la Fig. 2.9.

Ejemplo 1. Si A y B tienen respectivamente las coordenadas $(-1, 3)$ y $(4, -5)$, exprese el vector $\mathbf{AB} \in V_2$ en términos de la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Solución: El vector $\mathbf{AB}$ tiene las componentes $(4 - (-1), -5 - 3)$, o $(5, -8)$. Como $(5, -8) = 5\mathbf{u}_1 - 8\mathbf{u}_2$ en $\mathbb{R}_2$, debemos tener

$$\mathbf{AB} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}.$$

Ejemplo 2. Si A y B tienen respectivamente las coordenadas $(3, 0, -4)$ y $(7, -7, 5)$, exprese el vector $\mathbf{AB} \in V_3$ en términos de la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Solución: El vector $\mathbf{AB}$ tiene las componentes $(7 - 3, -7 - 0, 5 - (-4))$, o $(4, -7, 9)$. Como $(4, -7, 9) = 4\mathbf{u}_1 - 7\mathbf{u}_2 + 9\mathbf{u}_3$ en $\mathbb{R}_3$, tenemos

$$\mathbf{AB} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}.$$

Ejemplo 3. Demuestre que un triángulo isósceles tiene dos medianas de la misma longitud.

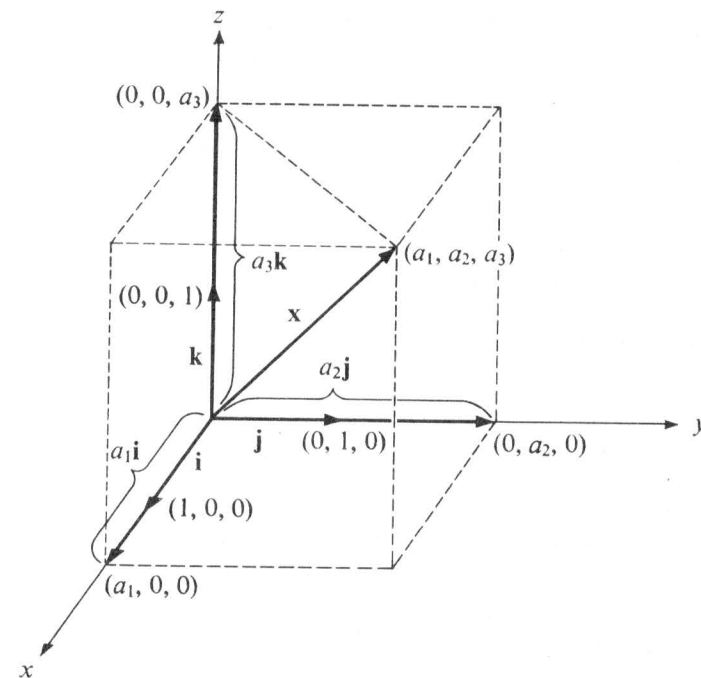


FIGURA 2.9

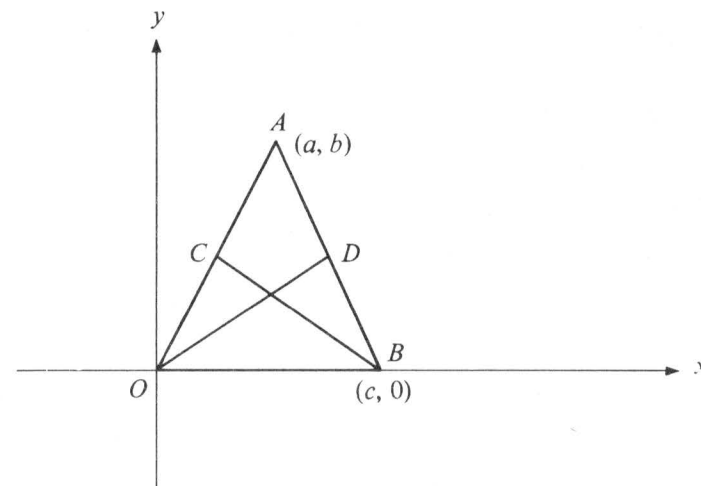


FIGURA 2.10

Solución: Coloquemos el triángulo en el plano coordenado como se indica en la Fig. 2.10. Suponer que $|\mathbf{OA}| = |\mathbf{AB}|$ y que C es el punto medio de OA y D el punto medio de AB . Entonces

$$\mathbf{OA} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}, \quad \mathbf{AB} = (c - a)\mathbf{i} - b\mathbf{j},$$

$$\mathbf{CA} = \frac{1}{2}(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}), \quad \mathbf{AD} = \frac{1}{2}[(c - a)\mathbf{i} - b\mathbf{j}].$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{OD} = \mathbf{OA} + \mathbf{AD} = \frac{1}{2}[(c + a)\mathbf{i} + b\mathbf{j}],$$

$$\mathbf{CB} = \mathbf{CA} + \mathbf{AB} = \frac{1}{2}[(2c - a)\mathbf{i} - b\mathbf{j}].$$

Por hipótesis, $|\mathbf{OA}|^2 = a^2 + b^2 = |\mathbf{AB}|^2 = (c - a)^2 + b^2$, y por lo tanto, $c^2 - 2ac = 0$. Evidentemente $|\mathbf{OD}| = |\mathbf{CB}|$ si y sólo si

$$(c + a)^2 = (2c - a)^2, \quad \text{or} \quad 3c^2 - 6ac = 0.$$

Por lo tanto $|\mathbf{OD}| = |\mathbf{CB}|$ si $|\mathbf{OA}| = |\mathbf{AB}|$.

Ejemplo 4. Demuestre que los tres segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un tetraedro tienen un punto en común, que biseca a cada segmento.

Solución: Escojamos un sistema coordenado relativo al tetraedro, como se indica en la Fig. 2.11. Entonces tenemos

$$\mathbf{OA} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{AB} = -a_1\mathbf{i} + (b - a_2)\mathbf{j} - a_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{OC} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}, \quad \mathbf{CB} = -c_1\mathbf{i} + (b - c_2)\mathbf{j}.$$

Por lo tanto si D es el punto medio de OA y E el punto medio de BC , entonces

$$\mathbf{OD} = \frac{1}{2}(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}), \quad \mathbf{CE} = \frac{1}{2}[-c_1\mathbf{i} + (b - c_2)\mathbf{j}],$$

$$\mathbf{DE} = \mathbf{OE} - \mathbf{OD} = \mathbf{OC} + \mathbf{CE} - \mathbf{OD}$$

$$= \frac{1}{2}[(c_1 - a_1)\mathbf{i} + (b + c_2 - a_2)\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}].$$

Si F es el punto medio de DE , entonces

$$\mathbf{OF} = \mathbf{OD} + \mathbf{DF} = \mathbf{OD} + \frac{1}{2}\mathbf{DE}$$

$$= \frac{1}{4}[(a_1 + c_1)\mathbf{i} + (a_2 + b + c_2)\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}].$$

A continuación, sea G el punto medio de OC y H el punto medio de AB . Puede demostrarse, como se hizo anteriormente que

$$\mathbf{GH} = \frac{1}{2}[(a_1 - c_1)\mathbf{i} + (a_2 + b - c_2)\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}].$$

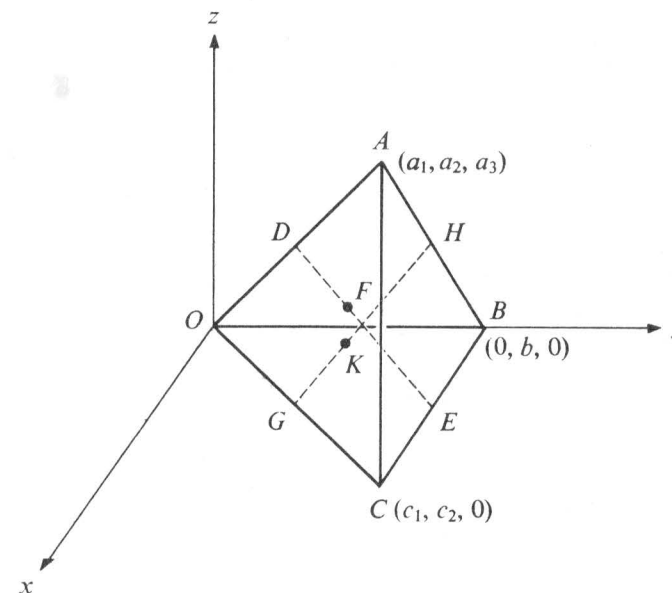


FIGURA 2.11

En consecuencia, si K es el punto medio de GH , entonces

$$\mathbf{OK} = \mathbf{OG} + \mathbf{GK} = \frac{1}{2}(\mathbf{DC} + \mathbf{GH})$$

$$= \frac{1}{4}[(a_1 + c_1)\mathbf{i} + (a_2 + b + c_2)\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}].$$

Como $\mathbf{OF} = \mathbf{OK}$, necesariamente $F = K$ y los segmentos DE y GH se intersectan en sus puntos medios. Como DE y GH son dos segmentos cualesquiera de los segmentos que unen a los puntos medios de los lados opuestos, esto demuestra que los tres segmentos se encuentran en un punto común de bisección.

EJERCICIOS

En cada uno de los Ejercicios 1-6 exprese el vector $\mathbf{AB}$ en función de la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ o $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, según el caso.

1. $A = (3, -7)$, $B = (0, 5)$ [esto es, A tiene las coordenadas $(3, -7)$ y B tiene las coordenadas $(0, 5)$].
2. $A = (4, -1, 2)$, $B = (7, -3, -3)$.
3. $A = (0, -1)$, $B = (-1, 0)$.
4. $A = (3, -9, -3)$, $B = (4, 2, -8)$.

5. $A = (7, 7, -7)$, $B = (3, -4, 5)$.
6. $A = (1, 9)$, $B = (-7, 3)$.
7. Si un triángulo tiene dos medianas de la misma longitud, demuestre que el triángulo es isósceles.
8. Si el vector $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \in V_3$ tiene el punto inicial $(-7, 3, -5)$, encuentre $a \in \mathbb{R}$ de tal modo que el punto terminal del vector $a\mathbf{x}$ se encuentre en el plano xy . Encuentre $b \in \mathbb{R}$ de manera que el punto terminal de $b\mathbf{x}$ se encuentre en el plano xz . Encuentre $c \in \mathbb{R}$ de tal manera que el punto terminal $c\mathbf{x}$ se encuentre en el plano yz .
9. Si los puntos A y B tienen coordenadas respectivas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) , entonces encontrar las coordenadas del punto P en el segmento AB tal que $d(A, P)/d(A, B) = r$, donde $0 < r < 1$.
10. ¿Pasa por el origen la línea que pasa por los dos puntos de coordenadas $(2, -1, -3)$ y $(-6, 3, 9)$?
11. Encuentre las condiciones en las cuales la línea que pasa por los dos puntos de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) pasa también por el origen.
12. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y sea $V \xrightarrow{f} W$ un homomorfismo tal que $\text{im } f = W$. Demuéstrese que $\dim V \geq \dim W$.
13. Demuestre que un homomorfismo $V \xrightarrow{f} W$ transforma cada subespacio de V en un subespacio de W . Si S es un subespacio de W y $T = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) \in S\}$, demuestre que T es un subespacio de V .*
14. Si $V \xrightarrow{f} W$ es un homomorfismo, defínase el *núcleo* de f por $\ker f = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.¹ Demuestre que $\ker f$ es un subespacio de V . Si $\text{im } f = W$, demuestre que $\dim V = \dim W + \dim \ker f$. Demuestre que f es un isomorfismo si y sólo si $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

* A T se le llama la imagen inversa del subespacio S , bajo el homomorfismo f . (N. del R.).

¹ Se respeta la abreviatura de núcleo (*kernel*) que es $\ker$. (N. del T.).

CAPÍTULO 3

Espacios de Producto Interno

1. PRODUCTOS INTERNOS

Dos vectores distintos de cero $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ ya sea en V_2 o V_3 tienen un ángulo mínimo θ bien definido entre ellos, como lo indica la Fig. 3.1. Siempre tenemos

$$0 \leq \theta \leq \pi,$$

con $\theta = 0$ si $\mathbf{y} = a\mathbf{x}$ para algún $a > 0$, y $\theta = \pi$ si $\mathbf{y} = a\mathbf{x}$ para todo $a < 0$.

Una operación útil ya sea en V_2 o V_3 es el *producto punto* definido abajo. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_2$ (o V_3), entonces el producto punto de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ es un escalar denotado por $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ y definido por

$$3.1 \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Podemos recordar que $|\mathbf{x}|$ denota la longitud del vector $\mathbf{x}$. El ángulo θ puede tomarse como cualquier ángulo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, en cuyo caso tenemos, por 3.1,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ o } \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Ejemplo 1. Si los vectores $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{AC}$ son como aparecen en la Fig. 3.2, encuentre $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC}$.

Solución: Por 3.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} &= |\mathbf{AB}| |\mathbf{AC}| \cos \pi/3 \\ &= 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}, \text{ o } 6. \end{aligned}$$

Hay solamente un ángulo θ entre 0 y π para el cual $\cos \theta = 0$, es decir el ángulo recto $\theta = \pi/2$. Este hecho nos permite establecer el siguiente resultado.

3.2. Teorema. Dos vectores no cero $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en V_2 o V_3 son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

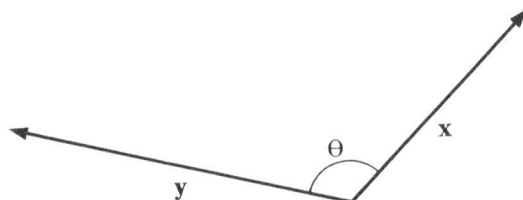


FIGURA 3.1

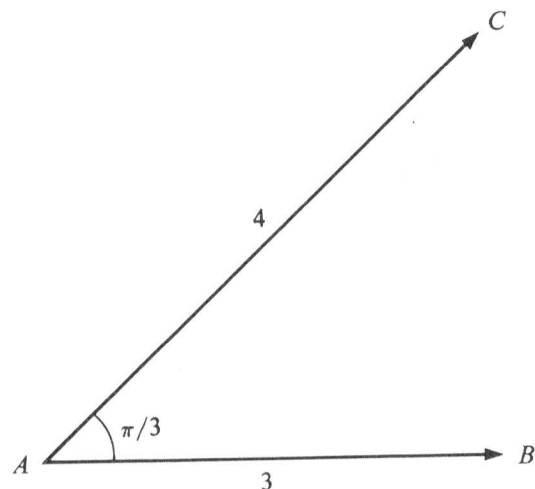


FIGURA 3.2

A una operación como la de producto punto, que asocia con cada par de vectores $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ un escalar único $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ se le llama un *producto interno* si tiene las siguientes propiedades.

3.3. Definición de un producto interno. Una operación que asocia a cada par de vectores $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de un espacio vectorial V un escalar único $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ se define como un producto interno si y sólo si tiene las siguientes tres propiedades. Para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ y $a \in \mathbb{R}$:

- (1) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$, $(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}$,
- (2) $(a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$,
- (3) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$, con $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Un espacio vectorial que tenga un producto interno se llama *espacio de producto interno*.

Si tomamos $\mathbf{y} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$ en (1) de arriba y utilizamos el hecho de que $0 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{0}$, entonces tenemos

$$0 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, si usamos la ley de cancelación en $\mathbb{R}$, obtenemos $0 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{0}$. Expresamos esta propiedad como sigue:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ para toda } \mathbf{x} \in V.$$

Un espacio V de producto interno se llama un *espacio euclidiano* si y sólo si tiene además la siguiente propiedad conmutativa:

$$3.4 \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \text{ para toda } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

En un espacio euclidiano V podemos extender 3.3(2) de la manera siguiente: $\mathbf{x} \cdot (a\mathbf{y}) = (a\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = a(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$. Esto es,

$$3.5 \quad \mathbf{x} \cdot (a\mathbf{y}) = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \text{ para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, a \in \mathbb{R}.$$

El producto punto en V_2 y V_3 definido por 3.1 realmente convierte a V_2 y V_3 en espacios euclidianos, como demostraremos a continuación. Notamos que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}| |\mathbf{x}| \cos 0 = |\mathbf{x}|^2$$

para toda $\mathbf{x}$ en V_2 o V_3 . Esto sugiere que definamos la longitud de un vector en cualquier espacio euclidiano V de la manera siguiente.

3.6. Definición de longitud. La longitud de cada vector $\mathbf{x}$ en un espacio euclidiano V es denotada por $|\mathbf{x}|$ y definida por

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Por 3.3(3),

$$|\mathbf{x}| = 0 \text{ si y sólo si } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Por 3.3(2) y 3.5,

$$(a\mathbf{x}) \cdot (a\mathbf{x}) = a[\mathbf{x} \cdot (a\mathbf{x})] = a[a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})] = a^2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})$$

y por lo tanto

$$3.7 \quad |a\mathbf{x}| = |a| |\mathbf{x}| \text{ para todo } \mathbf{x} \in V, a \in \mathbb{R}.$$

Recordamos que $\sqrt{a^2} = |a|$, el valor absoluto de a .

Un vector de longitud 1 se llama *vector unitario* o *vector normal*. Todo vector no cero tiene un múltiplo escalar que es un vector unitario:

$$\text{si } |\mathbf{x}| = b \neq 0, \text{ entonces } \left| \frac{1}{b} \mathbf{x} \right| = 1$$

por 3.7. Los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ de V_3 son ejemplos de vectores unitarios.

Usando 3.3(1) y (2) y 3.5, podemos demostrar fácilmente que

$$3.8 \quad \left(\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{x}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j \mathbf{y}_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_j)$$

para toda $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \in V$, un espacio euclidiano.

Una propiedad útil de un espacio euclidiano es la siguiente.

3.9. Desigualdad de Cauchy. Si V es un espacio euclidiano, entonces

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \text{ para toda } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Demostración: Observamos que $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|$ denota el valor absoluto del escalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, mientras que $|\mathbf{x}|$ y $|\mathbf{y}|$ denotan las longitudes de los vectores. Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ entonces, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ y es cierta la desigualdad de Cauchy ($0 \leq 0$). Supongamos que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Por conveniencia, tomemos

$$a = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad b = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z} = a\mathbf{y} - b\mathbf{x}.$$

Entonces, por 3.4 y 3.8,

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot \mathbf{z} &= (a\mathbf{y}) \cdot (a\mathbf{y}) - 2(a\mathbf{y}) \cdot (b\mathbf{x}) + (b\mathbf{x}) \cdot (b\mathbf{x}) \\ &= a^2(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) - 2ab^2 + b^2a \\ &= a[a(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) - b^2]. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} \geq 0$ y $a > 0$, tenemos $a(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) - b^2 \geq 0$ y $b^2 \leq a(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})$, esto es,

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}).$$

Sacando raíces cuadradas, obtenemos la desigualdad de Cauchy.

Un producto punto puede definirse en un espacio vectorial R_n de la manera siguiente.

Para toda $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R_n$, defínase

$$3.10 \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Por lo tanto el producto punto de dos vectores de R_n es un escalar.

Podemos verificar fácilmente que el producto punto (3.10) convierte a R_n en un espacio euclidiano. Así, si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R_n$ están dados por

$$\mathbf{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \mathbf{y} = (b_1, b_2, \dots, b_n), \quad \mathbf{z} = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + \dots + (a_n + b_n)c_n \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots + b_n c_n) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

La demostración de que $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}$ es semejante. Si $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} (r\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= (ra_1, ra_2, \dots, ra_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (ra_1)b_1 + (ra_2)b_2 + \dots + (ra_n)b_n \\ &= r(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \\ &= r(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

evidentemente $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$. También $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ si y sólo si $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, esto es, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Finalmente,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_n a_n = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Por lo tanto hemos demostrado el siguiente resultado.

3.11. Teorema. El espacio vectorial R_n , con un producto interno definido por 3.10, es un espacio euclidiano.

De acuerdo con 3.6, la longitud de un vector en R_n es dada por

$$|(a_1, a_2, \dots, a_n)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Por lo tanto está claro que cada uno de los vectores $u_1, u_2, \dots, u_n$ definidos en la Pág. 27 es un vector unitario. Otro vector unitario es

$$\left(\frac{e_1}{\sqrt{n}}, \frac{e_2}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{n}} \right),$$

donde cada e_i es o bien 1 o -1.

Recordamos del Cap. 2 que las transformaciones

$$V_2 \xrightarrow{f} R_2, f(x) = (c_1, c_2), \text{ las componentes de } x,$$

$$V_3 \xrightarrow{f} R_3, f(x) = (c_1, c_2, c_3), \text{ las componentes de } x,$$

son isomorfismos. Demostraremos que cada f conserva los productos punto, esto es, que

$$3.12 \quad x \cdot y = f(x) \cdot f(y) \text{ para toda } x, y \in V_2 \text{ (o } V_3).$$

La demostración de 3.12 para V_2 que se da abajo puede aplicarse casi palabra por palabra a V_3 .

Demostración de 3.12: Si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $x \cdot y = f(x) \cdot f(y) = 0$. Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, sean x y y vectores de posición (Fig. 3.3), θ el ángulo entre ellos y P y Q los puntos terminales de x y y , respectivamente. Por la ley de los cosenos, la distancia entre P y Q es dada por

$$[d(P, Q)]^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos \theta.$$

Por lo tanto, por la definición del producto punto en V_2 (3.1),

$$[d(P, Q)]^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2(x \cdot y).$$

Si usamos la fórmula de distancia, tenemos

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(x \cdot y),$$

lo que se reduce a

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2(x \cdot y)$$

o

$$x \cdot y = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Como $f(x) = (a_1, a_2)$, $f(y) = (b_1, b_2)$, y $f(x) \cdot f(y) = a_1b_1 + a_2b_2$ por 3.10, hemos demostrado 3.12.

El isomorfismo entre V_2 y R_2 y entre V_3 y R_3 preserva los productos punto por 3.12. Por lo tanto, si R_2 y R_3 son euclidianos,

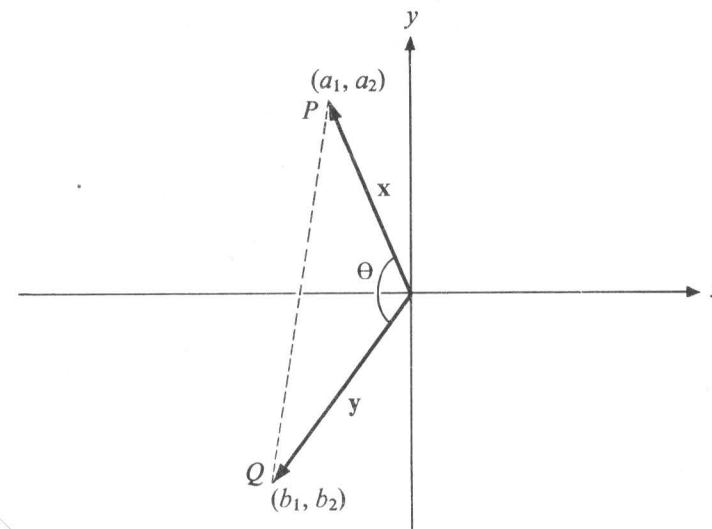


FIGURA 3.3

nos, el producto punto en V_2 y V_3 es en realidad un producto interno con la propiedad 3.4. Esto demuestra el siguiente resultado.

3.13. Teorema. Los espacios vectoriales V_2 y V_3 son euclidianos.

Ejemplo 2. ¿Bajo qué condiciones son perpendiculares las diagonales de un paralelogramo?

Solución: Si x y y son los lados no paralelos del paralelogramo, $x + y$ y $x - y$ son sus diagonales (Fig. 3.4). Por 3.2, $x + y$ y $x - y$ son perpendiculares si y sólo si

$$(x + y) \cdot (x - y) = 0.$$

Como V_2 es euclidiano, encontramos que $x \cdot y = y \cdot x$, y

$$(x + y) \cdot (x - y) = x \cdot x - y \cdot y.$$

Por lo tanto $x + y$ y $x - y$ son perpendiculares si y sólo si $x \cdot x = y \cdot y$, o

$$|x| = |y|,$$

esto es, si y sólo si el paralelogramo es equilátero. Un ejemplo de paralelogramo equilátero es un cuadrado.

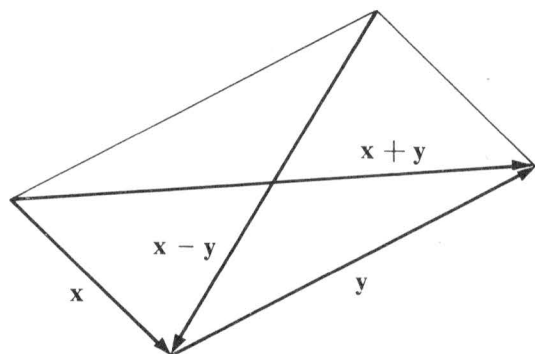


FIGURA 3.4

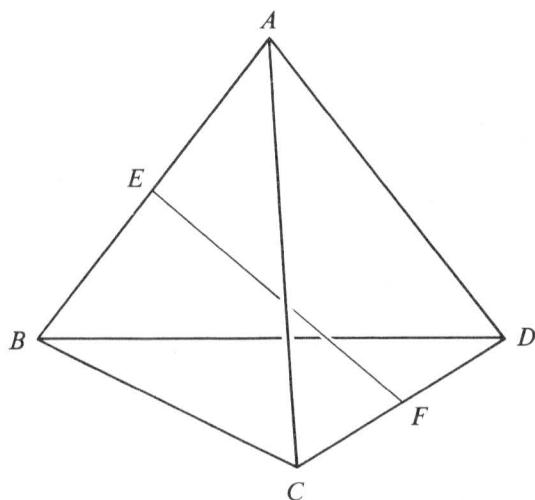


FIGURA 3.5

Ejemplo 3. Demuestre que la línea que une a los puntos medios de aristas opuestas de un tetraedro regular es perpendicular a éstas.

Solución: Sean A, B, C y D los vértices de un tetraedro regular (Fig. 3.5). Entonces, por hipótesis, cada cara del tetraedro es un triángulo equilátero. Sea E el punto medio de AB y F el punto medio de CD . Queremos demostrar que $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{EF}$ son perpendiculares, esto es, que

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{EF} = 0.$$

Dejamos como ejercicio para usted demostrar que

$$\mathbf{EF} = \frac{1}{2}(\mathbf{AD} + \mathbf{BC})$$

en cualquier tetraedro. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} \cdot \mathbf{EF} &= \frac{1}{2}(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AD} + \mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AD} - \mathbf{BA} \cdot \mathbf{BC}). \end{aligned}$$

Sin embargo, como los ángulos entre $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{AD}$ y entre $\mathbf{BA}$ y $\mathbf{BC}$ son iguales, y como

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{AD}| = |\mathbf{BA}| = |\mathbf{BC}|,$$

evidentemente,

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AD} = \mathbf{BA} \cdot \mathbf{BC}.$$

Por lo tanto $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{EF} = 0$, como queríamos demostrar.

Ejemplo 4. Si los puntos A, B , y C tienen coordenadas $(1, 1, 1)$, $(4, 1, 4)$ y $(0, 5, 8)$, respectivamente, ¿es ABC un triángulo rectángulo?

Solución: Los vectores $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, y $\mathbf{AC}$ tienen las componentes respectivas $(3, 0, 3)$, $(-4, 4, 4)$ y $(-1, 4, 7)$. Puesto que

$$(3, 0, 3) \cdot (-4, 4, 4) = -12 + 12 = 0,$$

$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} = 0$ y por lo tanto $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BC}$ son perpendiculares por 3.2. Por lo tanto, ABC es un triángulo rectángulo.

Ejemplo 5. Encuentre los ángulos del triángulo ABC de la Fig. 3.6.

Solución: Las componentes de $\mathbf{AB}$ son $(1 - (-3), 2 - 1)$ y las componentes de $\mathbf{AC}$ son $(1 - (-3), -2 - 1)$. Por lo tanto

$$\mathbf{AB} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad |\mathbf{AB}| = \sqrt{17}, \quad \mathbf{AC} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \quad |\mathbf{AC}| = 5,$$

y por 3.1 y 3.12

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC} = \sqrt{17} \cdot 5 \cdot \cos \theta_1 = (4, 1) \cdot (4, -3) = 4 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) = 13.$$

Por tanto

$$\cos \theta_1 = \frac{13}{5\sqrt{17}} = \frac{13}{85} \sqrt{17}, \text{ o } .6306 \text{ aprox.}$$

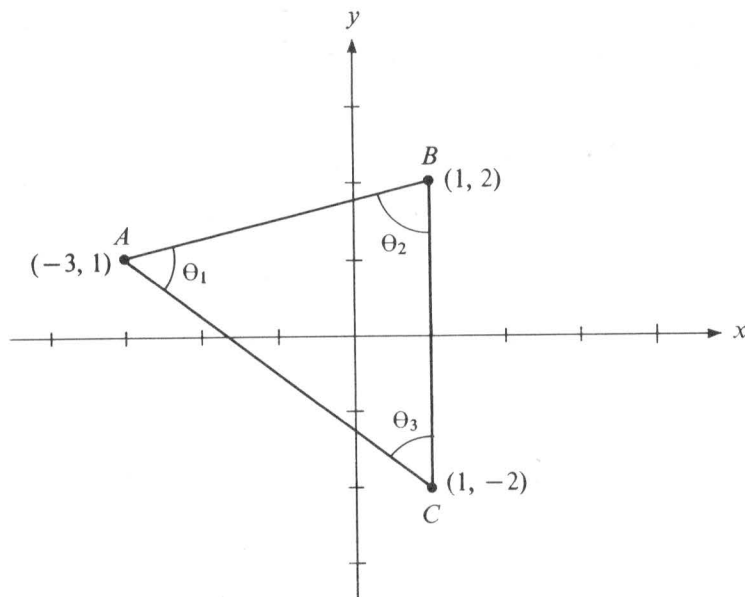


FIGURA 3.6

De una tabla de funciones trigonométricas,

$$\theta_1 = 50^\circ 54' \text{ aprox.}$$

De un modo semejante,

$$\mathbf{BA} = -4\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad |\mathbf{BA}| = \sqrt{17}, \quad \mathbf{BC} = -4\mathbf{j}, \quad |\mathbf{BC}| = 4, \quad \text{y}$$

$$\mathbf{BA} \cdot \mathbf{BC} = 4\sqrt{17} \cos \theta_2 = (-4, -1) \cdot (0, -4) = 4.$$

Por lo tanto

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{17}}{17} = .2425 \text{ aprox.}$$

y

$$\theta_2 = 75^\circ 58' \text{ aprox.}$$

Por último,

$$\mathbf{CB} = 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{CA} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j},$$

y

$$\mathbf{CB} \cdot \mathbf{CA} = 4 \cdot 5 \cdot \cos \theta_3 = (0, 4) \cdot (-4, 3) = 12.$$

De ahí que

$$\cos \theta_3 = .6$$

y

$$\theta_3 = 53^\circ 8' \text{ aprox.}$$

Revisamos nuestro trabajo observando que

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180.$$

Por supuesto que habiendo encontrado θ_1 y θ_2 , podríamos haber obtenido θ_3 de la ecuación anterior.

Los ángulos de un triángulo en E_3 pueden encontrarse de la misma manera.

EJERCICIOS

En cada uno de los Ejercicios 1-8, diga si los puntos con las coordenadas dadas son vértices de un triángulo rectángulo.

1. (3, 0, 1), (5, -2, 2), (5, -1, 4).
2. (0, 3), (-2, -12), (-4, 11).
3. (-3, 1), (5, 4), (0, -7).
4. (1, 1), (-1, -1), (-3, 7).
5. (2, 3, 1), (1, 0, 3), (0, 2, 1).
6. (1, 1, 1), (-1, 2, 2), (3, -5, 4).
7. (2, 5, 1), (-1, -4, -2), (3, -6, 0).
8. (2, 5, -2), (4, 5, -1), (1, 3, 0).

En cada uno de los Ejercicios 9-12, encuentre un vector unitario que sea perpendicular a los dos vectores dados de V_3 .

9. $\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}$.
10. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
11. $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
12. $3\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

En cada uno de los Ejercicios 13-16 encuentre los ángulos del triángulo cuyos vértices tienen las coordenadas dadas.

13. (5, 7), (-5, -3), (4, 6).
14. (4, 2), (1, 0), (-3, -6).
15. (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3).
16. (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, -1).

17. En un tetraedro regular, demuestre vectorialmente que la línea trazada desde cada vértice al centroide de la base opuesta es perpendicular a cada mediana de esa base.
18. Si A, B, C y D son los vértices de un tetraedro regular, demuestre que $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} = 0$.
19. Interprete la desigualdad de Cauchy en el espacio vectorial R_n .
20. Demuestre que las perpendiculares trazadas desde los vértices de un triángulo a los lados opuestos se encuentran en un punto.
21. Demuestre que las mediatrices perpendiculares de los lados de un triángulo se encuentran en un punto.
22. En la Pág. 64, ¿es verdad la recíproca del Ej. 3? O sea, si las tres líneas que unen los puntos medios de los lados opuestos de un tetraedro son perpendiculares a estos lados, ¿es regular el tetraedro?

2. BASES ORTOGONALES NORMALES

Recordaremos que dos vectores no cero en V_2 o V_3 son perpendiculares si y sólo si su producto punto es cero. Esto nos conduce a afirmar que dos vectores no cero en cualquier espacio euclidiano V son *ortogonales* (sinónimo de perpendicular) si y sólo si su producto interno es cero.

3.14. Definición de una base ortogonal normal. Sea V un espacio euclidiano finito-dimensional. Una base $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ de V se llama base ortogonal normal si y sólo si

$$(1) \quad |\mathbf{x}_i| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

y

$$(2) \quad \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0 \text{ si } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

La base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es una base ortogonal normal de V_3 ya que

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

También como ejemplo, la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de R_n definida en la Pág. 27 es una base ortogonal normal. En consecuencia,

$$|\mathbf{u}_i| = 1, \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \text{ si } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Abajo se demuestra que todo espacio euclidiano finito-dimensional tiene una base ortogonal normal.

3.15. Teorema. Todo espacio euclidiano V finito-dimensional tiene una base ortogonal normal.

Demostración. Si $\dim V = 1$, entonces cualquier conjunto $\{\mathbf{x}\}$ con $|\mathbf{x}| = 1$ es una base ortogonal normal. Supongamos que $\dim V = n, n > 1$, y que todo espacio euclidiano de dimensión $n - 1$ tiene una base ortogonal normal. Sea $\mathbf{x}_1$ cualquier vector unitario de V y

$$S = \{\mathbf{y} \in V \mid \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y} = 0\}.$$

Si $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in S, a \in R$, entonces $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_2 = 0$ y

$$\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_2 = 0, \quad \mathbf{x}_1 \cdot (a\mathbf{y}_1) = a(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1) = 0.$$

Así, $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ y $a\mathbf{y}_1$ están en S , y llegamos a la conclusión de que S es un subespacio de V . Como $\mathbf{x}_1 \cdot a\mathbf{x}_1 = a(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1) = a, \mathbf{x}_1 \cdot a\mathbf{x}_1 = 0$ si y sólo si $a = 0$. Esto demuestra que

$$S \cap R\mathbf{x}_1 = \{0\}.$$

Para cada $\mathbf{z} \in V, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{z} = b$, un escalar, y

$$\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{z} - b\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{z} - b(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1) = b - b = 0.$$

De ahí que $\mathbf{z} - b\mathbf{x}_1 \in S$ y $\mathbf{z} \in S + R\mathbf{x}_1$. Esto demuestra que

$$S + R\mathbf{x}_1 = V.$$

Como una base de S con $\mathbf{x}_1$ forma una base de V , evidentemente,

$$\dim S = n - 1.$$

Por lo tanto S es un espacio euclidiano de dimensión $n - 1$, el cual por hipótesis tiene una base ortogonal normal, digamos $\{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Como

$$|\mathbf{x}_1| = 1, \quad |\mathbf{x}_i| = 1 \text{ si } i = 2, 3, \dots, n,$$

y

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_i = 0 \text{ si } i = 2, 3, \dots, n,$$

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0 \text{ si } i \neq j, i, j = 2, 3, \dots, n,$$

está claro que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\}$ es una base ortogonal normal de V . El teorema se obtiene ahora por inducción matemática.

Otro modo de interpretar 3.15 es que para cualesquiera dos espacios euclidianos V y W de n dimensiones existe un isomorfismo $V \xrightarrow{f} W$ que preserva también los productos internos. Pues si V y W tienen bases ortogonales normales $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ respectivamente, entonces la función

$$V \xrightarrow{f} W, \quad f\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}_i, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

es un isomorfismo que preserva los productos internos:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j \mathbf{w}_j\right).$$

Por otro lado, si sabemos que para cada par de espacios euclidianos de n dimensiones existe un isomorfismo que conserva los productos internos, sabemos inmediatamente que todo espacio euclidiano V de n dimensiones tiene una base ortogonal normal. Por lo tanto $\mathbb{R}_n$ tiene una base ortogonal normal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y un isomorfismo $\mathbb{R}_n \xrightarrow{f} V$ que preserva los productos internos transforma $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ en una base ortogonal normal $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \dots, f(\mathbf{u}_n)\}$ de V .

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios siguientes se supone que V es un espacio euclidiano finito-dimensional.

1. Para cada subespacio A de V , sea $A' = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ para todo } \mathbf{y} \in A\}$. Demuestre que A' es un subespacio de V y que

$$A + A' = V, \quad A \cap A' = \{0\}.$$

2. Demuestre la *desigualdad del triángulo*

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \text{ para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

3. ¿Bajo qué condiciones sobre $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ es $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$?
4. ¿Se verifica en V la siguiente ley de cancelación? Si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \neq 0$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
5. Demuestre que $\max\{|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|\} \leq \max\{|\mathbf{x} + \mathbf{y}|, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\}$ para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
6. Demuestre que $|r\mathbf{x} + (1-r)\mathbf{y}| < \max\{|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|\}$ para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, r \in \mathbb{R}$, con $0 < r < 1$.

7. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores unitarios de V_2 o V_3 , demuestre que el vector $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ biseca al ángulo subtendido por $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.
8. Si (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}_3$, encuentre un vector unitario $\mathbf{u}$ que sea ortogonal a ambos. ¿Es $\mathbf{u}$ único?



CAPITULO 4

Algebras Vectoriales

1. ALGEBRA DE DOS DIMENSIONES

Alrededor del año de 1800, Wessel, Argand y otros matemáticos descubrieron un útil modo de multiplicar vectores en V_2 . Esta multiplicación, llamada producto cruz (llamado también *vectorial*), se definió con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, como lo indica la Fig. 4.1. Por lo tanto, el producto vectorial, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es un vector cuya longitud es dada por

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$$

y cuyo ángulo con la parte positiva del eje de las x es la suma de los ángulos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ forman con este eje. En función de la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ de V_2 , esta definición tiene la siguiente forma.

4.1. Definición de producto vectorial en V_2 . Para toda $a_i, b_i \in \mathbb{R}$,

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i} + (a_1b_1 + a_2b_2)\mathbf{j}.$$

Observamos que el producto vectorial de dos vectores es un vector, y en cambio el producto punto de dos vectores es un escalar. A este respecto el producto vectorial tiene mayor parecido con la operación de multiplicación ordinaria entre números.

Un espacio vectorial V que tiene una operación de multiplicación como la que se define anteriormente se llama *álgebra vectorial* si la operación de multiplicación tiene las dos propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} 4.2 \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \\ &\quad \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{v} \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \end{aligned}$$

$$4.3 \quad (a\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (a\mathbf{v}) = a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, a \in \mathbb{R}.$$

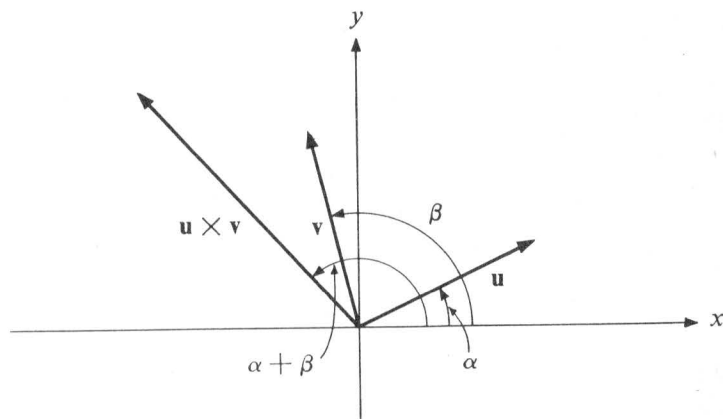


FIGURA 4.1

De 4.2 se concluye que

$$0 \times u = u \times 0 = 0 \text{ para todo } u \in V.$$

$$(-u) \times v = u \times (-v) = -(u \times v) \text{ para todo } u, v \in V.$$

Todo producto vectorial en V_2 tiene las propiedades 4.2 y 4.3. Por ejemplo, si

$$u = a_1 i + a_2 j, \quad v = b_1 i + b_2 j, \quad y \quad w = c_1 i + c_2 j,$$

entonces

$$\begin{aligned} (u + v) \times w &= [(a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j] \times (c_1 i + c_2 j) \\ &= [(a_1 + b_1)c_1 - (a_2 + b_2)c_2]i + [(a_1 + b_1)c_2 \\ &\quad + (a_2 + b_2)c_1]j \\ &= [(a_1 c_1 - a_2 c_2)i + (a_1 c_2 + a_2 c_1)j] + [(b_1 c_1 - b_2 c_2)i \\ &\quad + (b_1 c_2 + b_2 c_1)j] \\ &= u \times w + v \times w. \end{aligned}$$

Demostramos la otra mitad de 4.2 de una manera semejante. La demostración de 4.3 es como sigue:

$$\begin{aligned} (au) \times v &= (aa_1 i + aa_2 j) \times (b_1 i + b_2 j) \\ &= (aa_1 b_1 - aa_2 b_2)i + (aa_1 b_2 + aa_2 b_1)j \\ &= a[(a_1 b_1 - a_2 b_2)i + (a_1 b_2 + a_2 b_1)j] \\ &= a(u \times v). \end{aligned}$$

El resto de 4.3 se demuestra de una manera semejante. Deducimos que V_2 es un álgebra vectorial.

El producto vectorial en V_2 tiene muchas otras propiedades. No desarrollaremos el trabajo, pero puede demostrarse fácilmente que:

$$4.4 \quad u \times v = v \times u \text{ para todo } u, v \in V_2.$$

$$4.5 \quad u \times (v \times w) = (u \times v) \times w \text{ para todo } u, v, w \in V_2.$$

$$4.6 \quad i \times u = u \times i = u \text{ para todo } u \in V_2.$$

$$4.7. \text{ Todo } u \in V_2, u \neq 0, \text{ tiene un inverso } u^{-1} \in V_2 \text{ tal que } u \times u^{-1} = u^{-1} \times u = i.$$

Esto es, el producto vectorial es conmutativo y asociativo, i es el elemento de identidad relativo a $\times$, y cada vector no cero tiene un inverso relativo a $\times$. Por cierto,

$$\text{Si } u = a_1 i + a_2 j, \text{ entonces } u^{-1} = \frac{1}{|u|^2} (a_1 i - a_2 j).$$

Resumiendo nuestros comentarios anteriores, diremos que V_2 es un *campo* relativamente a las operaciones de suma y producto vectorial, y que V_2 tiene una multiplicación escalar que satisface a 1.1(5)-(8) y también a 4.3.

Aun cuando Wessel y Argand no estaban en conocimiento de ello, hoy día todo estudiante de matemáticas de universidad sabe que el campo V_2 es primordialmente el (esto es, isomórfico al) campo $\mathbb{C}$ de los números complejos. El vector j tiene la siguiente propiedad

$$j^2 = j \times j = -i;$$

esto es, j es la raíz cuadrada de $-i$. Por lo tanto, asociado con el vector

$$ai + bj$$

tenemos el número complejo

$$a + b\sqrt{-1}.$$

No denotamos $\sqrt{-1}$ con i , puesto que i tiene otro significado en V_2 .

Todo número complejo $z = a + b\sqrt{-1}$ tiene una forma trigonométrica

$$z = r(\cos \theta + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \theta),$$

donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ es el ángulo que indica la Fig. 4.2. Si

$$z_k = r_k (\cos \theta_k + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \theta_k), \quad k = 1, 2,$$

entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + \sqrt{-1} \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)].$$

Esto demuestra que el producto de números complejos es el mismo que el producto vectorial, originalmente dado por Wessel y Argand.

EJERCICIOS

1. Supongamos que hemos definido el producto vectorial en V_2 como sigue: para toda $a_i, b_i \in \mathbb{R}$,

$$(a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k},$$

donde r y s son dos elementos fijos de $\mathbb{R}$. ¿Es V_2 un álgebra vectorial? ¿Para qué valores de r y s es V_2 un campo?

2. ALGEBRA TRIDIMENSIONAL

El álgebra vectorial V_2 no es tan útil como podría ser para resolver problemas de física y geometría, por la sencilla razón de que el mundo físico es tridimensional y no bidimensional. Por lo tanto, es lógico que muchos matemáticos de principios del siglo XIX trataran de construir un álgebra con un significado físico y geométrico a partir de V_3 . Idealmente, buscaban un modo de definir un producto vectorial en V_3 , de tal manera que el álgebra resultante fuera un campo. Con esta mira, esperaban encontrar un análogo tridimensional del campo de los números complejos. Sabemos ahora lo que no sabían ellos entonces, esto es, que no existe un campo tridimensional sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto nunca se obtuvo la solución ideal.

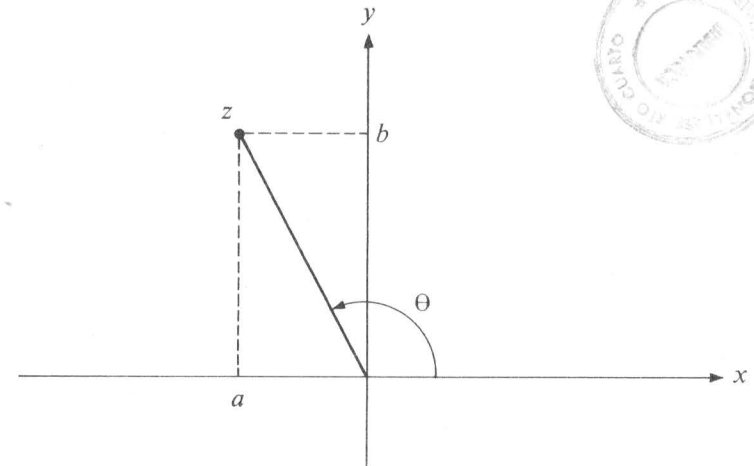


FIGURA 4.2

Las álgebras vectoriales de utilidad se descubrieron en el siglo XIX, notablemente por los esfuerzos del matemático, físico y astrónomo irlandés Hamilton y el matemático y filósofo alemán Grassmann. Gibbs y Heaviside en la década de los ochenta sacaron provecho de estos esfuerzos para darse un vehículo matemático para la física teórica.

Describiremos el álgebra V_3 a la manera del físico matemático Gibbs. Supongamos que escogemos un sistema derecho de coordenadas rectangulares en E_3 y que $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores unitarios convencionales a lo largo de los ejes coordenados positivos.

4.8. Definición de producto vectorial en V_3 . El producto vectorial de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, escrito $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, es un vector cuya longitud se obtiene al multiplicar el producto de las longitudes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ por el seno del ángulo mínimo θ entre ellos y cuya dirección es perpendicular a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y en el lado del plano que contiene a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en el cual la rotación de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ a través del ángulo θ aparece en contra de las manecillas del reloj.

Como el seno del ángulo recto es 1, se concluye de 4.8 que (Fig. 4.3)

$$4.9 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

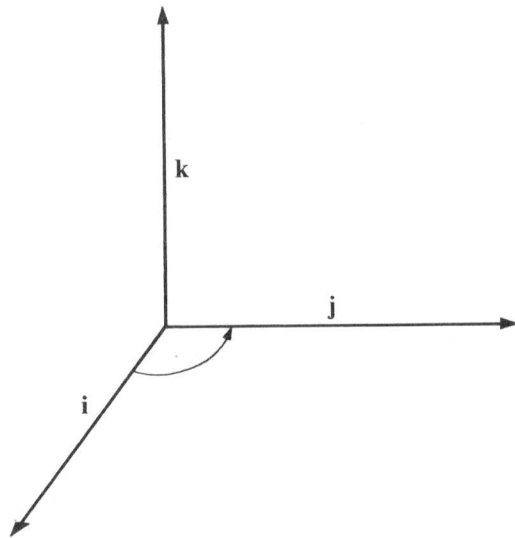


FIGURA 4.3

Desde el punto terminal de $-k$ la rotación de j a i aparece en sentido contrario a las manecillas del reloj, y lo mismo ocurre para $-i$ y $-j$. Esto es (Fig. 4.4),

$$4.10 \quad j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j.$$

Finalmente, el seno del ángulo 0 es 0, de tal modo que

$$4.11 \quad i \times i = 0, \quad j \times j = 0, \quad k \times k = 0.$$

Aunque no lo haremos, puede demostrarse que el producto vectorial en V_3 tiene las propiedades 4.2 y 4.3. Por lo tanto V_3 es un álgebra vectorial.

Lo que haremos es suponer que el producto vectorial de los vectores i, j y k nos es dado por 4.9-4.11. Entonces podrá encontrarse el producto vectorial de dos vectores cualesquiera suponiendo que las propiedades 4.2 y 4.3 se mantienen. Ilustramos a continuación la manera de hacerlo.

Ejemplo 1. Encuentre $(3i - j) \times (2i - 5k)$.

Solución: Al usar la ley distributiva (4.2), tenemos

$$\begin{aligned} (3i - j) \times (2i - 5k) &= (3i - j) \times (2i) + (3i - j) \times (-5k) \\ &= (3i) \times (2i) + (-j) \times (2i) + (3i) \times (-5k) \\ &\quad + (-j) \times (-5k). \end{aligned}$$

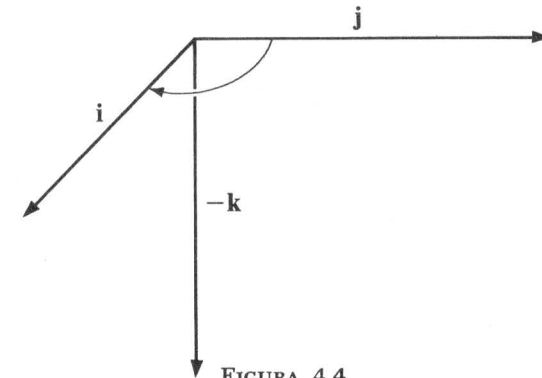


FIGURA 4.4

Ahora, usando 4.3, obtenemos

$$(3i - j) \times (2i - 5k) = 6(i \times i) - 2(j \times i) - 15(i \times k) + 5(j \times k).$$

Finalmente, usando 4.9-4.11, obtenemos

$$\begin{aligned} (3i - j) \times (2i - 5k) &= 6(0) - 2(-k) - 15(-j) + 5(i) \\ &= 5i + 15j + 2k. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Encontrar $(i + j - k) \times (i - j + k)$.

Solución: Multiplicando cada término de $i + j - k$ por cada término de $i - j + k$ (que está permitido por 4.2 y 4.3), obtenemos

$$\begin{aligned} (i + j - k) \times (i - j + k) &= i \times i - i \times j + i \times k + j \times i \\ &\quad - j \times j + j \times k - k \times i + k \times j \\ &\quad - k \times k \\ &= 0 - k - j - k - 0 + i - j - i - 0 \\ &= -2j - 2k. \end{aligned}$$

La fórmula general para encontrar el producto vectorial de dos vectores cualesquiera puede hallarse del mismo modo. Es de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 4.12 \quad (a_1i + a_2j + a_3k) \times (b_1i + b_2j + b_3k) \\ = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k. \end{aligned}$$

Podemos, si así lo deseamos, tomar 4.12 como la definición del producto vectorial en V_3 . Puede entonces demostrarse que las

propiedades 4.2, 4.3, 4.9, 4.10 y 4.11 se cumplen, por cálculos directos aunque cansados.

Usando los determinantes de una manera formal, podremos recordar 4.12 de la manera siguiente:

$$4.13 \quad (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Entendemos que el determinante debe desarrollarse por menores de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.$$

Vemos de 4.13 algo que era ya evidente en la definición (4.8) de Gibbs, esto es, que el producto vectorial es *anticonmutativo*:

$$4.14 \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3.$$

En la definición por determinantes

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Esta propiedad es diferente de la propiedad conmutativa que se tiene para la multiplicación en un campo.

Si hacemos que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ en 4.12, obtenemos la propiedad siguiente:

$$4.15 \quad \mathbf{v} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ para todo } \mathbf{v} \in V_3.$$

Un sencillo ejemplo nos convence de que el *producto vectorial no es asociativo*. A saber, $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$ porque

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

Por lo tanto, la ley asociativa de multiplicación con la que hemos acostumbrado trabajar no podrá usarse en V_3 . La diferencia entre $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ y $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ se verá a continuación.

Como $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son perpendiculares a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ por 4.8, y como $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ es también perpendicular a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, evidentemente el vector $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ y $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son coplanares. Por lo tanto $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. La relación entre ellos es la siguiente:

$$4.16 \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Demostración: Sea $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, y $\mathbf{w} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Entonces, por 4.12,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= [a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)]\mathbf{i} \\ &\quad + [a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)]\mathbf{j} \\ &\quad + [a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)]\mathbf{k} \\ &= [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})b_1 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})c_1]\mathbf{i} + [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})b_2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})c_2]\mathbf{j} \\ &\quad + [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})b_3 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})c_3]\mathbf{k} \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Para encontrar $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$, podemos usar 4.14 y 4.16 como sigue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= -\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= -[(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}]. \end{aligned}$$

Podemos expresar esto de la manera siguiente:

$$4.17 \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$

Al comparar 4.16 y 4.17, vemos que

$$4.18 \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \text{ si, y sólo si, } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$

Por ejemplo, si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son tres vectores perpendiculares entre sí, entonces $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = 0$ y $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ por 4.18. En este caso, sin embargo, resulta evidente de 4.16 y 4.17 que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 3. Encontrar $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times [(\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i} - 7\mathbf{k})]$.

Solución: Tenemos por 4.16 que

$$\begin{aligned} (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times [(\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i} - 7\mathbf{k})] &= [(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (4\mathbf{i} - 7\mathbf{k})](\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \\ &\quad - [(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{j} - 3\mathbf{k})](4\mathbf{i} - 7\mathbf{k}) \\ &= 4(\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - 2(4\mathbf{i} - 7\mathbf{k}) \\ &= -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

El triple producto vectorial se da en función del producto punto tanto en 4.16 como en 4.17. Se da a continuación otra relación entre los productos escalar y vectorial.

Si $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, y $\mathbf{w} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\&= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).\end{aligned}$$

Esto es,

$$4.19 \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Podemos usar 4.16 y 4.19 para calcular la longitud del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Así,

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] \\&= \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}] \\&= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),\end{aligned}$$

y tenemos

$$4.20 \quad |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}.$$

Si recordamos que por 3.1, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \cos^2 \theta \\&= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2(1 - \cos^2 \theta) \\&= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Como $\sin \theta \geq 0$ si $0 \leq \theta \leq \pi$, podemos expresar 4.20 en la forma:

$$4.21 \quad |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta.$$

Volviendo a 4.8, vemos que ésta es la longitud de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como nos la da Gibbs.

En lenguaje geométrico, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ es el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (Fig. 4.5). Esto resulta evidente de 4.21, puesto que $|\mathbf{u}| \sin \theta$ es la distancia entre $\mathbf{v}$ y su lado opuesto en el paralelogramo. Así, el área es $|\mathbf{v}|(|\mathbf{u}| \sin \theta)$. El paralelogramo de la Fig. 4.5 tiene área

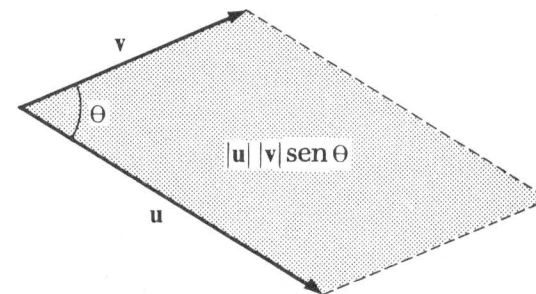


FIGURA 4.5

O si, y sólo si, $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, o bien, si, y sólo si, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son colineales y por lo tanto múltiplos escalares entre sí. Expresamos el resultado de la manera siguiente.

4.22. Teorema. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si, y sólo si $\mathbf{v} = a\mathbf{u}$ para alguna $a \in \mathbb{R}$.

Como un caso especial de 4.22, tenemos $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ para toda $\mathbf{u} \in V_3$. Por lo tanto, tenemos también

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ para toda } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3.$$

Esto es, $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y, de manera semejante, $\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, como se establece en la definición de producto vectorial dada por Gibbs (4.8).

Mencionamos de paso que no hay un elemento de identidad en V_3 relativo a la operación de producto vectorial. Esto es, no hay $\mathbf{u} \in V_3$ tal que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \text{ para toda } \mathbf{v} \in V_3.$$

Pues $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$, y por lo tanto no puede ser igual a $\mathbf{v}$ a menos que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

EJERCICIOS

Dado que $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, y $\mathbf{y} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, encuentre cada uno de los Ejercicios 1-12.

1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.
2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{y})$.
3. $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{y})$.
4. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{y}$.
5. $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{y})$.
6. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{y}$.
7. $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \times \mathbf{y}$.
8. $(2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}) \cdot \mathbf{y}$.
9. $(3\mathbf{w}) \times (3\mathbf{v} - 2\mathbf{y})$.
10. $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$.
11. $(\mathbf{w} \times 2\mathbf{w}) \times \mathbf{y}$.
12. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{y})$.

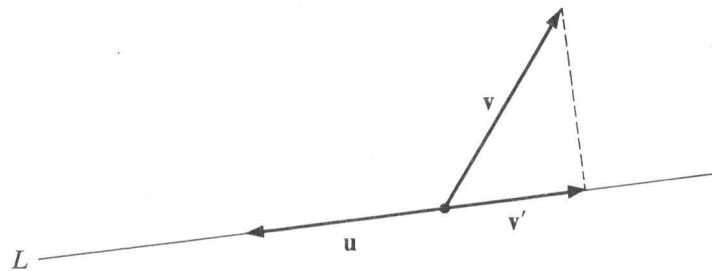


FIGURA 4.6

13. Demuestre que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ para toda $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$.
14. Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario a lo largo de la línea L y sea $\mathbf{v}$ cualquier vector en V_3 . Demuestre que la proyección $\mathbf{v}'$ de $\mathbf{v}$ en L (véase la Fig. 4.6) nos la da $\mathbf{v}' = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$.
15. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son los tres lados de un triángulo, demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$.
16. Demuestre la identidad de Jacobi:
 $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$.
17. Demuestre la identidad de Lagrange:
 $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{y}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{y} \in V_3$.
18. Si $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, demuestre que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

19. Expresa $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$.
20. Demuestre que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$, si, y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

3. LINEAS EN EL ESPACIO

Dado un sistema de coordenadas rectangulares en E_3 , toda línea y plano en E_3 puede describirse por medio de ecuaciones lineales. Consideremos primeramente una línea L que pasa por un punto P con coordenadas (a_1, a_2, a_3) y que tiene la dirección de un vector no cero

$$\mathbf{v} = h_1\mathbf{i} + h_2\mathbf{j} + h_3\mathbf{k}.$$

Entonces un punto Q está sobre una línea L si, y sólo si (Fig. 4.7)

$$\mathbf{PQ} = t\mathbf{v} \text{ para toda } t \in \mathbb{R}.$$

En otras palabras,

$$L = \{Q \in E_3 \mid \mathbf{PQ} = t\mathbf{v} \text{ para alguna } t \in \mathbb{R}\}$$

si consideramos L como un conjunto de puntos en E_3 . Si Q tiene coordenadas (x, y, z) , entonces

$$\mathbf{PQ} = (x - a_1)\mathbf{i} + (y - a_2)\mathbf{j} + (z - a_3)\mathbf{k},$$

$$t\mathbf{v} = (th_1)\mathbf{i} + (th_2)\mathbf{j} + (th_3)\mathbf{k},$$

y Q está en L si, y sólo si,

$$x - a_1 = th_1, \quad y - a_2 = th_2, \quad z - a_3 = th_3 \text{ para alguna } t \in \mathbb{R}.$$

Esto es, L es la *representación gráfica* del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$4.23 \quad x = a_1 + h_1t, \quad y = a_2 + h_2t, \quad z = a_3 + h_3t.$$

Esto significa que L consiste de todos los puntos con coordenadas (x, y, z) que satisfacen a 4.23 para alguna $t \in \mathbb{R}$. Las Ecs. 4.23 dan a x, y y z en función de una variable t , llamada un *parámetro*. Por esta razón las Ecs. 4.23 se llaman *ecuaciones paramétricas* de la línea L .

Ejemplo 1. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea L que pasa por el punto P con coordenada $(-1, 3, 5)$ y en la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

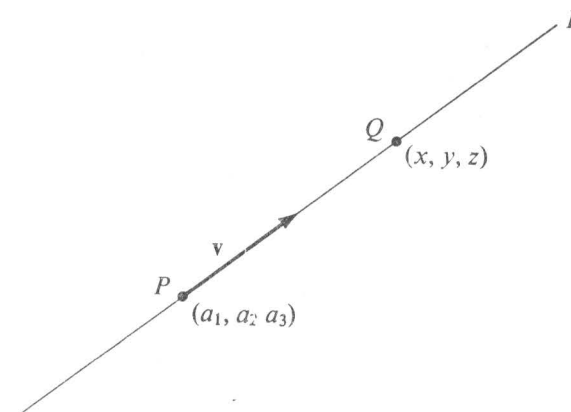


FIGURA 4.7

Solución: Haciendo $(a_1, a_2, a_3) = (-1, 3, 5)$ y $h_1\mathbf{i} + h_2\mathbf{j} + h_3\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ en 4.23, obtenemos

$$x = -1 + 2t, \quad y = 3 - t, \quad z = 5$$

como ecuaciones paramétricas de L . Si, por ejemplo, hacemos que $t = 7$ obtenemos $(13, -4, 5)$ como (las coordenadas de) un punto sobre L . Podemos preguntarnos por dónde cruza L los planos coordenados. Dejando que $x = 0$, vemos que $-1 + 2t = 0$ y $t = \frac{1}{2}$. Si $t = \frac{1}{2}$, obtenemos el punto $(0, \frac{5}{2}, 5)$ sobre L , punto en el cual L cruza el plano yz . De una manera semejante, $y = 0$ si $t = 3$ y $(5, 0, 5)$ es el punto donde L cruza el plano xz . La línea L no cruza el plano xy , ya que $z = 5 \neq 0$ para todos los valores de t . En otras palabras, L es paralela al plano xy .

Podemos obtener otra forma de ecuación para L usando 4.22. Otra vez, hagamos que (a_1, a_2, a_3) sean las coordenadas de un punto P en L y $\mathbf{v} = h_1\mathbf{i} + h_2\mathbf{j} + h_3\mathbf{k}$ la dirección de L . Entonces un punto $Q \in E_3$ está sobre L si, y sólo si

$$\mathbf{v} \times \mathbf{PQ} = \mathbf{0}.$$

Suponiendo que Q tiene las coordenadas (x, y, z) , tenemos $\mathbf{PQ} = (x - a_1)\mathbf{i} + (y - a_2)\mathbf{j} + (z - a_3)\mathbf{k}$ y la ecuación anterior tiene la forma

$$4.24 \quad (h_1\mathbf{i} + h_2\mathbf{j} + h_3\mathbf{k}) \times [(x - a_1)\mathbf{i} + (y - a_2)\mathbf{j} + (z - a_3)\mathbf{k}] = \mathbf{0}.$$

Expandiendo 4.24, obtenemos

$$[h_2(z - a_3) - h_3(y - a_2)]\mathbf{i} + [h_3(x - a_1) - h_1(z - a_3)]\mathbf{j} + [h_1(y - a_2) - h_2(x - a_1)]\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Como los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son linealmente independientes, por 2.3, los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en esta ecuación son cero. Por lo tanto,

$$h_2(z - a_3) - h_3(y - a_2) = 0, \quad h_3(x - a_1) - h_1(z - a_3) = 0, \\ h_1(y - a_2) - h_2(x - a_1) = 0$$

o

$$4.25 \quad \begin{cases} h_2(x - a_1) = h_1(y - a_2) \\ h_3(x - a_1) = h_1(z - a_3) \\ h_3(y - a_2) = h_2(z - a_3) \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones de L . Esto es, un punto de coordenadas (x, y, z) está en L , si, y sólo si, x , y , y z son soluciones

de 4.25. Llamamos a 4.25 la *forma simétrica* de la ecuación de una línea.

Ejemplo 2. Sea una línea L que pase por el punto de coordenadas $(3, -3, 4)$ y en la dirección $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Encuentre la forma simétrica de la ecuación de L .

Solución: Haciendo $(a_1, a_2, a_3) = (3, -3, 4)$ y $h_1\mathbf{i} + h_2\mathbf{j} + h_3\mathbf{k} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, encontramos que el sistema 4.25 se convierte en

$$(1) \quad \begin{cases} 3(x - 3) = (y + 3) \\ -2(x - 3) = (z - 4) \\ -2(y + 3) = 3(z - 4). \end{cases}$$

Para encontrar el punto donde L cruza el plano xy , hacemos que $z = 0$ en (1). Entonces obtenemos,

$$-2(x - 3) = -4, \text{ o } x = 5,$$

$$-2(y + 3) = 3(-4), \text{ o } y = 3.$$

Por lo tanto, $(5, 3, 0)$ es el punto donde L cruza al plano xy . Haciendo que $y = 0$ en (1), obtenemos $x = 4$ y $z = 2$. Por lo tanto, $(4, 0, 2)$ es el punto en el cual L cruza el plano xz . Del mismo modo, si $x = 0$ en (1), encontramos que $(0, -12, 10)$ es el punto por el cual L cruza el plano yz . Podemos encontrar otros puntos sobre L al darles otros valores a x , y o z . Por ejemplo, si $x = -2$, entonces, por (1)

$$3(-2 - 3) = y + 3, \text{ o } y = -18,$$

$$-2(-2 - 3) = z - 4, \text{ o } z = 14.$$

Por lo tanto, $(-2, -18, 14)$ está sobre L .

Sea L la línea que pasa por el punto P de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y en la dirección de un vector $\mathbf{v}$. Podemos considerar a L como una *línea dirigida*, siendo la dirección de L la misma que la de $\mathbf{v}$. Entonces el rayo

$$L^+ = \{Q \in E_3 \mid \mathbf{PQ} = t\mathbf{v} \text{ para toda } t \geq 0\}$$

se llama el *rayo positivo* sobre L con el punto extremo P , y

$$L^- = \{Q \in E_3 \mid \mathbf{PQ} = t\mathbf{v} \text{ para toda } t \leq 0\}$$

es llamado el *rayo negativo* sobre L con el punto extremo P .

Ejemplo 3. Describa los rayos positivo y negativo con punto extremo P de la línea L , pasando por los puntos P y Q con

coordenadas respectivas $(2, 2, 2)$ y $(3, 2, 4)$, si la dirección de L es de P a Q .

Solución: El vector $\mathbf{PQ}$ con componentes $(3 - 2, 2 - 2, 4 - 2)$ puede decirse que es una dirección $\mathbf{v}$ de L :

$$\mathbf{v} = \mathbf{PQ} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}.$$

Se ha trazado la línea L en la Fig. 4.8 y se han indicado su rayo positivo L^+ y su rayo negativo L^- teniendo a P como extremo. Las ecuaciones paramétricas de L son como sigue:

$$x = 2 + t, \quad y = 2, \quad z = 2 + 2t.$$

Por lo tanto,

$$L^+ = \{(2 + t, 2, 2 + 2t) \mid t \geq 0\},$$

$$L^- = \{(2 + t, 2, 2 + 2t) \mid t \leq 0\}.$$

Por ejemplo, si $t = 1$, obtenemos el punto $Q = (3, 2, 4)$ en el rayo positivo; y si $t = -1$, obtenemos el punto $(1, 2, 0)$ en el rayo negativo.

Si la dirección de la línea L es un vector unitario $\mathbf{u}$, el parámetro t mide distancias a lo largo de L . Esto es, si P es un punto dado sobre L y

$$L = \{Q \in E_3 \mid \mathbf{PQ} = t\mathbf{u} \text{ para alguna } t \in \mathbb{R}\},$$

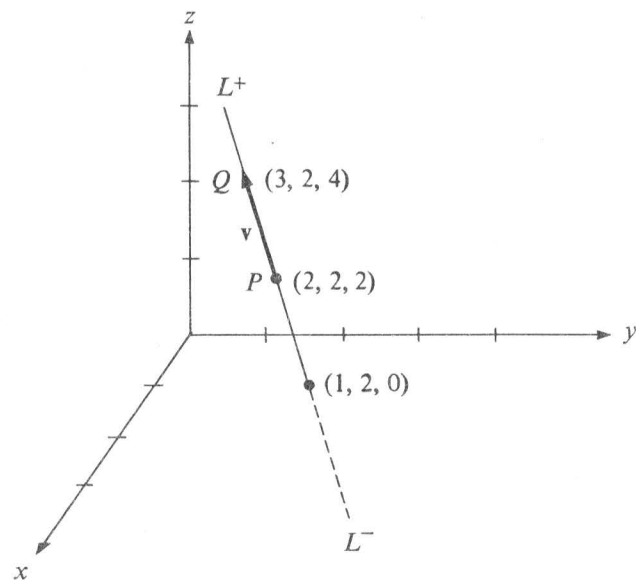


FIGURA 4.8

entonces t es una distancia dirigida desde P hasta Q sobre la línea L si $\mathbf{PQ} = t\mathbf{u}$.

Esto es cierto porque

$$|\mathbf{PQ}| = |t\mathbf{u}| = |t| |\mathbf{u}| = |t|.$$

Si $t > 0$, Q está en el rayo positivo; en cambio si $t < 0$, t está en el rayo negativo.

Por ejemplo, el vector $\mathbf{v}$ en el Ej. 3 tiene por longitud $\sqrt{5}$. Por lo tanto

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\mathbf{i} + 2\mathbf{k})$$

es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$. El punto Q en el rayo positivo a dos unidades de P se da por

$$\mathbf{PQ} = 2\mathbf{u} = \frac{2\sqrt{5}}{5} (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}).$$

Si (x, y, z) son las coordenadas de Q , entonces

$$(x - 2)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 2)\mathbf{k} = \frac{2\sqrt{5}}{5} (\mathbf{i} + 2\mathbf{k})$$

y

$$x - 2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad y - 2 = 0, \quad z - 2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Por lo tanto Q tiene las coordenadas

$$\left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}, 2, 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right).$$

Como ejemplos especiales, tenemos los ejes coordenados en las direcciones $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. Por lo tanto, cada eje tiene el origen O como un punto de él. El eje x está dado por

$$\{Q \in E_3 \mid \mathbf{OQ} = t\mathbf{i} \text{ para alguna } t \in \mathbb{R}\}$$

y tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

El rayo positivo del eje x es $\{Q \in E_3 \mid \mathbf{OQ} = t\mathbf{i}, t \geq 0\}$, al que llamamos normalmente la rama positiva del eje x . Los ejes y y z se dan de una manera semejante.

Si la línea L tiene un vector unitario $\mathbf{u}$, los ángulos entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{j}$, y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{k}$ se llaman *ángulos directores* de L . Son los ángulos α , β , y γ de la Fig. 4.9. Los cosenos de α , β , y γ se llaman los *cosenos directores* de L . Como $\mathbf{u}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son vectores unitarios, evidentemente

$$\cos \alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}, \quad \cos \beta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{j}, \quad \cos \gamma = \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}.$$

En otras palabras, si $\mathbf{u} = h_1\mathbf{i} + h_2\mathbf{j} + h_3\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = h_1$, y así sucesivamente, y

$$h_1 = \cos \alpha, \quad h_2 = \cos \beta, \quad h_3 = \cos \gamma.$$

Como $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = |\mathbf{u}|^2 = 1$, tenemos

$$4.26 \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Ejemplo 4. Si la línea L tiene dirección $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, encuentre los cosenos directores de L .

Solución: Primero encontramos el vector unitario $\mathbf{u}$ en la dirección de L . Como $|\mathbf{v}|^2 = 2^2 + 4^2 + (-4)^2 = 36$, $|\mathbf{v}| = 6$ y

$$\mathbf{u} = \frac{1}{6}\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

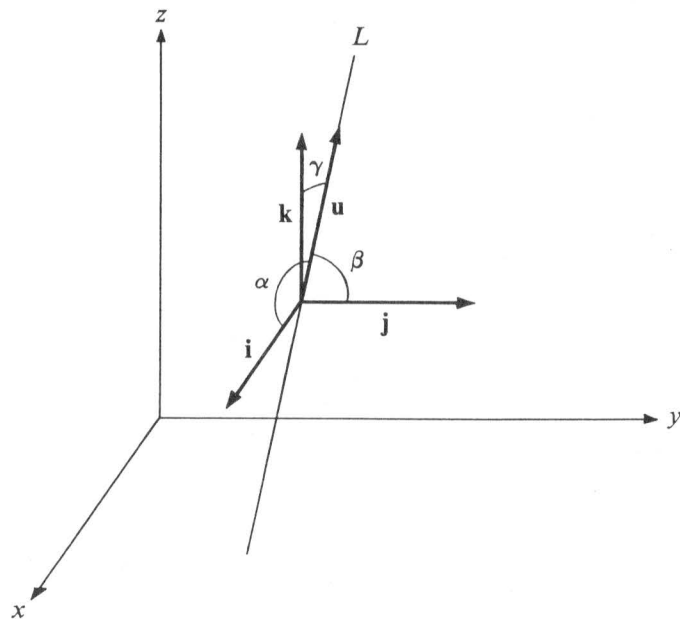


FIGURA 4.9

De ahí

$$\cos \alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = -\frac{2}{3}.$$

De una tabla de funciones trigonométricas, encontramos

$$\alpha = 70^\circ 32', \quad \beta = 48^\circ 11', \quad \gamma = 131^\circ 49', \text{ aprox.}$$

EJERCICIOS

En cada uno de los Ejercicios 1-6 encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea dada. Encuentre también los puntos donde la línea cruza los planos coordenados.

1. Línea que pasa por el punto $(1, 5, 3)$ con dirección $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.
2. Línea que pasa por el punto $(0, -4, 9)$ con dirección $3\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$.
3. Línea que pasa por el punto $(-3, 3, 4)$ con dirección $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
4. Línea que pasa por el punto $(2, -4, 8)$ con dirección $\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
5. Línea que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ con dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
6. Línea que pasa por el punto $(-1, 1, -1)$ con dirección $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

En todos los Ejercicios 7-12 encuentre la forma simétrica de la ecuación de la línea que pasa por los puntos P y Q , suponiendo que la dirección de la línea es de P a Q . Encuentre también los puntos por donde la línea cruza los planos coordenados.

7. $P = (4, 7, -3)$, $Q = (5, 2, 2)$.
8. $P = (0, 0, 0)$, $Q = (3, -1, 4)$.
9. $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 2, 1)$.
10. $P = (11, 4, -13)$, $Q = (7, 3, -15)$.
11. $P = (-2, 3, 5)$, $Q = (4, 1, -1)$.
12. $P = (0, 3, 2)$, $Q = (0, 2, 2)$.

13. Encuentre los cosenos directores de la línea con dirección:

- | | |
|--|---|
| a. $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. | b. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. |
| c. $\mathbf{i} - \mathbf{k}$. | d. $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. |

14. Si $\pi/3$ y $3\pi/4$ son dos de los ángulos directores de una línea, encuentre todos los valores posibles del tercer ángulo director.
15. Demuestre que solamente uno de los ángulos directores de una línea puede ser menor de $\pi/4$.

4. PLANOS EN EL ESPACIO

Por un punto dado P en el espacio hay un único plano p perpendicular a un vector $\mathbf{v}$ no cero dado (Fig. 4.10). Si consideramos a p como un conjunto de puntos en E_3 , entonces,

$$p = \{Q \in E_3 \mid \mathbf{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

Al darles coordenadas a los puntos P y Q y componentes a $\mathbf{v}$, podemos obtener una ecuación para el plano $\mathbf{v}$. Por lo tanto, demos a P y Q las coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (x, y, z) , respectivamente

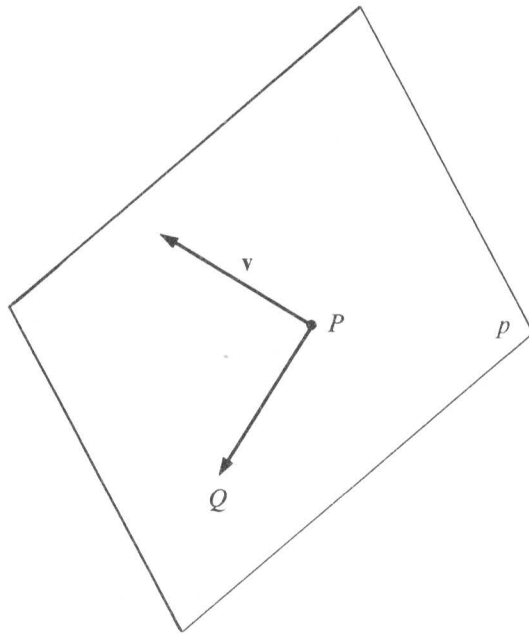


FIGURA 4.10

y sea $\mathbf{v} = h_1\mathbf{i} + h_2\mathbf{j} + h_3\mathbf{k}$.

Entonces

$$\mathbf{PQ} = (x - a_1)\mathbf{i} + (y - a_2)\mathbf{j} + (z - a_3)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{v} = (x - a_1)h_1 + (y - a_2)h_2 + (z - a_3)h_3.$$

Por lo tanto, el plano p es la representación gráfica de la ecuación

$$4.27 \quad h_1(x - a_1) + h_2(y - a_2) + h_3(z - a_3) = 0$$

en cuanto a que el punto Q con coordenadas (x, y, z) está en p si, y sólo si, x, y y z satisfacen la Ec. 4.27.

Un vector no cero perpendicular a un plano se llama a menudo un *vector normal* del plano. La Ec. 4.27 de un plano contiene las coordenadas (a_1, a_2, a_3) de un punto en el plano y las componentes (h_1, h_2, h_3) de un vector normal del plano.

Ejemplo 1. Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 3, 1)$ y que tiene un vector normal $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

Solución: Por 4.27,

$$2(x + 1) - (y - 3) + 7(z - 1) = 0$$

o

$$2x - y + 7z = 2$$

es una ecuación del plano. Podemos encontrar el punto donde el plano cruza a los ejes coordenados dándoles valor 0 a dos de las variables x, y, z y despejar la ecuación resultante para la tercera variable. Por lo tanto si $y = 0$ y $z = 0$, entonces $2x = 2$ y $x = 1$. Por lo tanto, el plano cruza el eje x por el punto $(1, 0, 0)$ y llamamos a 1 la *intersección con x* del plano. Si $x = 0$ y $z = 0$, obtenemos $y = -2$. Por lo tanto, -2 es la *intersección con y* ; esto es, el plano cruza el eje y por el punto $(0, -2, 0)$. Por último, si $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación, vemos que $\frac{2}{7}$ es la *intersección con z* y que el plano cruza el eje z por $(0, 0, \frac{2}{7})$.

Tres puntos no colineales cualesquiera en E_3 están contenidos en un único plano, como puede averiguarse fácilmente.

Ejemplo 2. Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos A, B , y C con coordenadas respectivas $(1, 2, 1)$, $(2, 3, 4)$, y $(0, 4, 5)$.

Solución: Los vectores $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{AC}$ tienen las componentes respectivas $(2 - 1, 3 - 2, 4 - 1)$ y $(0 - 1, 4 - 2, 5 - 1)$. Por lo tanto

$$\mathbf{AB} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{AC} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Un vector normal obvio del plano es $\mathbf{v} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$, calculado de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ &= (4 - 6)\mathbf{i} + (-3 - 4)\mathbf{j} + (2 + 1)\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Por cierto, el hecho de que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ indica que A , B y C no son colineales.

Usando el punto A en la Ec. 4.27, obtenemos

$$-2(x - 1) - 7(y - 2) + 3(z - 1) = 0$$

o

$$2x + 7y - 3z = 13$$

como una ecuación del plano que pasa por A , B y C . Las intersecciones del plano con los ejes son, claramente, $\frac{13}{2}$, $\frac{13}{7}$ y $-\frac{13}{3}$.

Vimos anteriormente que todo plano en E_3 tiene una ecuación lineal de la forma 4.27. Es verdad, recíprocamente, que cada ecuación lineal de la forma

$$4.28 \quad ax + by + cz = d,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y no son simultáneamente a, b y c cero, tiene un plano en E_3 como su representación gráfica. Para ver esto, sea (x_1, y_1, z_1) cualquier solución de 4.28 y sea $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Entonces el plano p que pasa por el punto con coordenadas (x_1, y_1, z_1) y que tiene el vector normal $\mathbf{v}$ tiene la ecuación

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

o

$$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1.$$

Sin embargo, $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$, ya que (x_1, y_1, z_1) es una solución de 4.28. Por lo tanto la representación gráfica de 4.28 es el plano p .

Ejemplo 3. Describa la representación gráfica en E_3 de la ecuación

$$2x + y + 3z = 6.$$

Solución: Podemos verificar fácilmente que $(3, 0, 0)$ es una solución de esta ecuación. Por lo tanto la representación gráfica de esta ecuación es el plano que pasa por el punto $(3, 0, 0)$ y que tiene vector normal $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Con la misma exactitud podríamos describir también la representación gráfica encontrando tres puntos no colineales en la gráfica, tales como $(3, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$, y $(0, 0, 2)$, y luego afirmando que la representación gráfica es el plano que pasa por estos tres puntos.

Dos planos son paralelos si, y sólo si, sus vectores normales son paralelos, esto es, si son dependientes. Por lo tanto los coeficientes de x , y , y z son proporcionales en las ecuaciones de planos paralelos. Por ejemplo,

$$2x - y + 3z = 7 \quad \text{y} \quad 6x - 3y + 9z = -4$$

son ecuaciones de planos paralelos.

De un modo semejante, dos planos son perpendiculares si, y sólo si, sus vectores normales son perpendiculares. Por lo tanto si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores normales de dos planos, entonces son perpendiculares si, y sólo si, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Por ejemplo,

$$2x - y + 3z = 7 \quad \text{y} \quad 5x + 4y - 2z = 11$$

son ecuaciones de planos perpendiculares ya que

$$(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 0.$$

Si dos planos no son paralelos, entonces se intersectan en una línea. Podemos encontrar las ecuaciones paramétricas de su línea de intersección, como lo indica el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea L de intersección de los planos con las ecuaciones

$$x - y + 2z = 4,$$

$$3x + y - z = 2.$$

Solución: Si $z = 0$ en ambas ecuaciones y resolvemos el sistema resultante para x y y , vemos que $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 0)$ es un punto en L . Si $z = 2$, vemos que $(1, 1, 2)$ es otro punto en esta línea. Por lo tanto, el vector con componentes $(1 - \frac{3}{2}, 1 + \frac{5}{2}, 2)$, o $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 2)$, está en la dirección de L . Podemos, si así lo deseamos, multiplicar estas componentes por 2 para obtener $(-1, 7, 4)$, que es un vector en la dirección de L , con componentes en-

teras. Usando $(1, 1, 2)$ como un punto de L , tenemos por 4.23 que

$$x = 1 - t, \quad y = 1 + 7t, \quad z = 2 + 4t$$

son ecuaciones paramétricas de L .

EJERCICIOS

En todos los Ejercicios 1-4 encuentre una ecuación del plano que pase por el punto dado y que tenga el vector normal dado.

1. $(2, 4, -3), \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
2. $(0, 1, 5), \mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.
3. $(1, -4, -5), -3\mathbf{j} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
4. $(-2, -7, 8), \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

En todos los Ejercicios 5-8 encuentre una ecuación del plano que pase por los tres puntos dados.

5. $(1, 1, 1), (2, -2, 2), (-1, 1, 1)$.
6. $(0, 0, 0), (2, 1, 0), (3, 0, 2)$.
7. $(4, 1, 2), (-1, 1, 1), (3, 1, -1)$.
8. $(-1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 5)$.

En los Ejercicios 9 y 10 encuentre las ecuaciones paramétricas de las líneas de intersección de los planos que tienen las ecuaciones dadas.

9. $3x - y = 4, y + 2z = 5$.
10. $x + 2y + 3z = 6, 2x - y + z = 2$.

11. Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, 1)$, y que es perpendicular al plano con ecuación $2x - y + 5z = 1$.
12. Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(4, -1, 3)$ y que es perpendicular a los planos con ecuaciones $x + 2y - 3z = 3$ y $2x + y + 4z = 1$.

Apéndice



1. CAMPOS

Entre los sistemas comunes de números en matemáticas, se encuentran:

- $\mathbb{Z}$, el sistema de enteros,
- $\mathbb{Q}$, el sistema de números racionales,
- $\mathbb{R}$, el sistema de números reales,
- $\mathbb{C}$, el sistema de números complejos,

En la lista de arriba, cada conjunto contiene al anterior,

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Cada uno de estos sistemas es cerrado bajo operaciones de suma y multiplicación, que tienen las propiedades siguientes:

A.1 $a + b = b + a, \quad ab = ba$. (*Leyes conmutativas*)

A.2 $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a(bc) = (ab)c$. (*Leyes asociativas*)

A.3 $(a + b)c = ac + bc, \quad c(a + b) = ca + cb$. (*Ley distributiva*)

Existen los números 0 y 1 con las propiedades especiales siguientes:

A.4 $0 + a = a + 0 = a, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. (*Elementos de identidad*)

Por lo tanto 0 se llama elemento de identidad aditivo y 1 el elemento de identidad multiplicativo. Cada número a tiene un opuesto $-a$, llamado el negativo de a , que tiene la siguiente propiedad:

A.5 $a + (-a) = (-a) + a = 0$. (*Inverso aditivo*)

Las cinco propiedades anteriormente mencionadas se cumplen para los elementos a, b, c en cualquiera de los sistemas $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$. Los sistemas $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, y $\mathbb{C}$ tienen además esta otra propiedad: cada número a no cero tiene un recíproco $1/a$ tal que

A.6 $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$. (*Inverso multiplicativo*)

Estamos ahora en posición de hacer la siguiente definición.

A.7. Definición de un campo. Un sistema algebraico compuesto de un conjunto de elementos F y operaciones de suma y multiplicación en F se llama un campo si, y sólo si, las operaciones tienen las propiedades A. 1 – A. 6.

Por lo tanto, de acuerdo con esta definición, los sistemas de números racionales, números reales y números complejos son ejemplos de campos.

Existen campos de diferente naturaleza de la de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, y $\mathbb{C}$. Por ejemplo, para cada número primo p hay un único campo que tiene exactamente p elementos. Este campo se llama el campo de los enteros módulo p y se denota por $\mathbb{Z}_p$,

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}.$$

La suma y multiplicación en $\mathbb{Z}_p$ se definen de la misma manera que la suma y multiplicación en $\mathbb{Z}$, reducidas módulo p . Esto es, para encontrar $a + b$ y $a \cdot b$ para $a, b \in \mathbb{Z}_p$, primero los calculamos en $\mathbb{Z}$ y luego restamos múltiplos de p de $a + b$ y $a \cdot b$ hasta que encontremos el resto en $\mathbb{Z}_p$. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$ tenemos $3 + 4 = 7$; por lo tanto $3 + 4 = 7 - 5 = 2$ en $\mathbb{Z}_5$, y $3 + 4 = 7 - 7 = 0$ en $\mathbb{Z}_7$. De una manera semejante, $3 \cdot 4 = 12$ en $\mathbb{Z}$; por lo tanto $3 \cdot 4 = 12 - 10 = 2$ en $\mathbb{Z}_5$, y $3 \cdot 4 = 12 - 7 = 5$ en $\mathbb{Z}_7$. No resulta difícil demostrar que $\mathbb{Z}_p$ con operaciones de suma y multiplicación definidas de tal manera resultan tener estructura de campo.

Como cada uno de los campos $\mathbb{Z}_p$, p un primo, es finito, podemos dar las tablas completas de suma y multiplicación para éste. Por ejemplo, el campo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ tiene las tablas sencillas:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

El campo $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ tiene las siguientes tablas de suma y multiplicación:

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Empezando con cualquier campo F , podemos formar otro campo $F(X)$ consistente de todas las expresiones racionales de la forma

$$\frac{f(X)}{g(X)},$$

donde $f(X)$ y $g(X)$ son polinomios en el símbolo X , con $g(X) \neq 0$. Así, por ejemplo,

$$\frac{3X}{X^2 - X + 1}, \quad \frac{X^5 - 3X^4 + 2X - 1}{X^2 + 5X + 3}$$

son elementos de $\mathbb{Q}(X)$. Las expresiones racionales se suman y multiplican de la misma manera que los números racionales. Por lo tanto, para todos los polinomios $a(X)$, $b(X)$, $c(X)$, y $d(X)$, con $b(X) \neq 0$ y $d(X) \neq 0$, defínase

$$\frac{a(X)}{b(X)} + \frac{c(X)}{d(X)} = \frac{a(X)d(X) + b(X)c(X)}{b(X)d(X)}$$

$$\frac{a(X)}{b(X)} \cdot \frac{c(X)}{d(X)} = \frac{a(X)c(X)}{b(X)d(X)}.$$

La demostración de que $F(X)$ es un campo es la misma que la demostración de que $\mathbb{Q}$ es un campo. El campo $F(X)$ se llama una *extensión transcendente* del campo F .

Existe otro modo fundamental de formar campos ilustrado por

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Puede demostrarse fácilmente que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un campo que contiene a $\mathbb{Q}$ como un subcampo. El campo $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ se llama una *extensión algebraica* de $\mathbb{Q}$.

Otro ejemplo de una extensión algebraica de un campo es el campo complejo

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1,$$

que es una extensión algebraica de $\mathbb{R}$. Puede encontrarse una discusión de extensiones algebraicas de campos en casi todos los textos de álgebra moderna.*

Los números racionales así como los reales están ordenados de tal manera que para cada dos números, uno es mayor que o igual al otro. Con respecto a esta relación de "mayor que o

* Véase, por ejemplo, R. E. Johnson *University Algebra*, Prentice Hall, 1966.

igual a", $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son campos ordenados como se define a continuación.

A.8. Definición de un campo ordenado. Un campo F se llama un campo ordenado si, y sólo si, tiene una relación $\geq$ con las siguientes propiedades:

- (1) $a \geq a$ para toda $a \in F$. (*Reflexiva*)
- (2) Si $a \geq b$ y $b \geq a$, entonces $a = b$. (*Antisimétrica*)
- (3) Si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $a \geq c$. (*Transitiva*)
- (4) Para toda $a, b \in F$, ya sea $a \geq b$ o $b \geq a$.
- (5) Si $a \geq b$, entonces $a + c \geq b + c$ para toda $c \in F$.
- (6) Si $a \geq b$, entonces $ac \geq bc$ para toda $c \geq 0$.

Las otras relaciones de orden $>$, $\leq$ y $<$ se definen de la manera común. Por lo tanto $a > b$ si, y sólo si, $a \geq b$ y $a \neq b$; $a \leq b$ si y sólo si $b \geq a$; y $a < b$ si, y sólo si, $b > a$. La relación $>$ (y, de una manera semejante, $<$) tiene las siguientes propiedades:

- A.9** Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. (*Transitiva*)
- A.10** Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ para toda $c \in F$.
- A.11** Si $a > b$, entonces $ac > bc$ para toda $c > 0$.

Demostración de A.9: Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a \geq b$ y $b \geq c$ de tal manera que $a \geq c$ por A.8(3). Afirmamos que $a > c$; pues si $a = c$, entonces $c \geq b$, $b \geq c$, y $b = c$ por A.9(2), contrario a la suposición de que $b > c$.

Demostración de A.10: Si $a > b$ entonces $a + c \geq b + c$ para toda $c \in F$. Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$ por la ley de cancelación aditiva, contraria al hecho de que $a > b$. Por lo tanto $a + c > b + c$.

Demostración de A.11: Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac \geq bc$ por A.8(6). Si $ac = bc$, entonces $a = b$ por la ley de cancelación multiplicativa (ya que $c \neq 0$). Esto es contrario al hecho de que $a > b$. Por lo tanto, $ac > bc$.

Si tomamos como F un campo ordenado y

$$F^+ = \{a \in F \mid a > 0\}, \quad F^- = \{a \in F \mid a < 0\},$$

entonces fácilmente podemos demostrar lo siguiente:

- A.12** F^+ es cerrado bajo suma y multiplicación.
- A.13** $F^- = \{-a \mid a \in F^+\}.$

Demostración de A.12: Sea $a > 0$ y $b > 0$. Entonces $ab > 0b = 0$ por A.11. También, $a + b > 0 + b > 0$ y $a + b > 0$ por A.10 y A.9. Llegamos a la conclusión de que si $a, b \in F^+$, entonces $ab, a + b \in F^+$.

Demostración de A.13: Si $a \in F$, $a \neq 0$, entonces ya sea $a > 0$, o $a < 0$ por A.8(4). Por lo tanto $a \in F^+$ o $a \in F^-$. Si $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$ también, y o bien $-a \in F^+$ o $-a \in F^-$. Si $a \in F^+$, entonces no podemos obtener $-a \in F^+$ también, puesto que entonces $a + (-a) = 0 \in F^+$ por A.12, contrario al hecho de que $b > 0$ para toda $b \in F^+$. Por lo tanto si $a \in F^+$, entonces $-a \in F^-$. De un modo semejante, si $b \in F^-$, entonces $-b \in F^+$. Como $b = -(-b)$, toda $b \in F^-$ tiene la forma $b = -a$ para alguna $a \in F^+$.

En función de nuestros comentarios anteriores, todo campo ordenado F está dividido en tres subconjuntos ajenos entre sí: F^+ , el conjunto de los *elementos positivos*; F^- , el conjunto de *elementos negativos*; y $\{0\}$:

$$F = F^+ \cup F^- \cup \{0\}.$$

Como $(-a)^2 = a^2$ para toda $a \in F$ no cero y ya sea a o $-a$ está en F^+ , por A.12 nos encontramos con que:

- A.14** $a^2 > 0$ para toda $a \in F$ no cero.

En particular, $1 > 0$ ya que $1^2 = 1$. A su vez, $1 + 1 = 2 > 0$, $1 + 2 = 3 > 0$, y así sucesivamente, por ser cerrado F^+ bajo la suma.

Un campo tal como $\mathbb{Z}_p$ no está ordenado. Si estuviera ordenado $\mathbb{Z}_p$, entonces $1 > 0$, $2 > 0$, y así sucesivamente hasta $(p - 1) + 1 > 0$, contrario al hecho de que $(p - 1) + 1 = 0$.

El campo $\mathbb{C}$ de los números complejos tampoco está ordenado. De hecho, contiene un elemento i tal que $i^2 = -1$, y si estuviera ordenado, tanto -1 como 1 estarían en $\mathbb{C}^+$ por A.14. Sin embargo, $0 = (-1) + 1 \in \mathbb{C}^+$ por A.12, contrario al hecho de que $0 \notin \mathbb{C}^+$.

Si F es un campo ordenado y $A \subset F$, $A \neq \emptyset$, entonces un elemento b de F se llama *cota superior* del conjunto A si, y sólo si, $x \leq b$ para toda $x \in A$. De un modo semejante, $c \in F$ se llama *cota inferior* del conjunto A si, y sólo si $c \leq x$ para toda $x \in F$. Si b es una cota superior de A , mientras ningún elemento de F menor que b es cota superior de A , entonces b se llama *mínima cota superior* (m.c.s.) del conjunto A . Por definición, si un conjunto

tiene una m.c.s., entonces la m.c.s. es única. Sin embargo, un conjunto no necesariamente debe tener m.c.s. La *máxima cota inferior* (m.c.i.) de un conjunto se define de una manera semejante.

Un campo ordenado F se dice que es *completo* si, y sólo si, todo subconjunto de F que tiene cota superior, tiene una m.c.s. Puede demostrarse fácilmente que todo subconjunto de un campo completo que tiene una cota inferior tiene máxima cota inferior. Puede demostrarse que el campo $\mathbb{R}$ de los números reales es caracterizado únicamente por la siguiente afirmación.*

A.15. El campo $\mathbb{R}$ es un campo ordenado completo.

Esta caracterización de $\mathbb{R}$ nos permite demostrar, por ejemplo, que toda $a \in \mathbb{R}^+$ tiene una única raíz n -ésima $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}^+$ para todo entero $n > 1$. Puede demostrarse que

$$\sqrt[n]{a} = \text{m.c.s. } \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^n \leq a\}.$$

El campo $\mathbb{C}$ de los números complejos nos es dado por

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \text{ donde } i^2 = -1.$$

Realmente, $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i.$$

Como $\mathbb{R}1 \cap \mathbb{R}i = \{0\}$, $\mathbb{C}$ es un *espacio vectorial bidimensional* sobre $\mathbb{R}$. Por supuesto también es un álgebra vectorial gracias a su operación de multiplicación que se define por

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Como señalamos en el Cap. 4, $\mathbb{C}$ es isomorfa al álgebra vectorial V_2 .

2. SISTEMAS COORDENADOS

Una propiedad interesante de $\mathbb{R}$ es que puede usarse como un conjunto de coordenadas para los puntos en una línea L . Cuando se hace esto de la manera común, a cada punto en L se le asigna un número real único como su coordenada y cada

* "Mínima cota superior" es traducción de "least upper bound" que se abrevia: "l.u.b.". En México suele decirse simplemente "sup" cuando se habla de la mínima de las cotas superiores. También "máxima cota inferior", "greatest lower bound", o "inf" son sinónimos. (N. del R.).

número real es la coordenada de un punto único en L . Es más, el orden en $\mathbb{R}$ se conserva en L ; esto es, si el punto B se encuentra entre dos puntos A y C en L , la coordenada de B se encontrará entre las coordenadas de A y C . Se coloca una punta de flecha en L para indicar la dirección de las coordenadas en aumento, como lo indica la Fig. A.1.

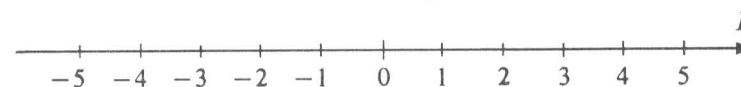


FIGURA A.1

A una línea L que tenga a $\mathbb{R}$ como un sistema *coordenado* la llamaremos una *línea coordenada* o un *eje coordenado*. El punto en L con coordenada 0 lo llamaremos el *origen*.

Los números se asignan de un modo regular en una línea coordenada de tal manera que las distancias puedan, como aparece a continuación, calcularse fácilmente.

A.16. Fórmula de distancia en una línea. Si los puntos A y B en una línea coordenada tienen las coordenadas respectivas a y b , entonces la distancia $d(A, B)$ entre A y B nos es dada por

$$d(A, B) = |b - a|.$$

Resulta conveniente, en ciertas ocasiones, usar distancias dirigidas en una línea coordenada L . Si los puntos A y B en L tienen coordenadas respectivas a y b , entonces la *distancia dirigida* de A a B se define como $b - a$. Por lo tanto, por definición, la distancia dirigida de A a B es sencillamente $d(A, B)$ si la dirección de A a B es la dirección de L , cero si $A = B$ y $-d(A, B)$ si la dirección de A a B es opuesta a la dirección de L .

El conjunto $\mathbb{R}_2$ de todos los pares ordenados de números reales puede usarse como un conjunto de coordenadas para los puntos en un plano euclidiano E_2 . Esto se hace generalmente, como lo indica la Fig. A.2. Por lo tanto dos ejes coordenados perpendiculares son seleccionados en E_2 de tal modo que se intersecten en sus orígenes. Uno de los ejes coordenados se denomina el *eje de las x* y el otro el *eje de las y*. Cada punto P en E_2 tiene coordenadas únicas (a, b) en $\mathbb{R}_2$, donde la coordenada del pie de la perpendicular trazada desde P al eje de las

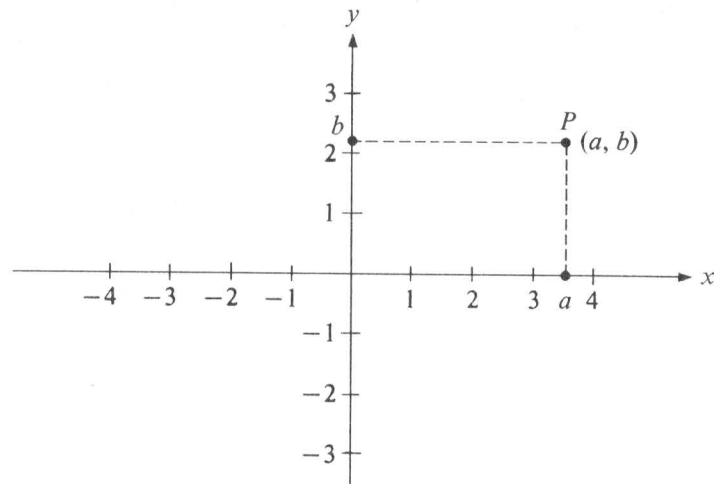


FIGURA A.2

x es a y desde P hasta el eje de las y es b . Asimismo, cada par ordenado (a, b) en $\mathbb{R}_2$ son las coordenadas de un único punto en E_2 , seleccionadas de una manera evidente. Si el punto P en E_2 tiene la coordenada (a, b) en $\mathbb{R}_2$, llamamos a a la *coordenada x* y a b la *coordenada y* de P . A un plano que tenga a $\mathbb{R}_2$ como un conjunto de coordenadas en el modo descrito anteriormente, lo llamaremos un *plano coordenado rectangular* o un *plano cartesiano*.

Si los ejes x y y en un plano cartesiano tienen la misma escala, podremos encontrar la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano de la manera siguiente.

A.17. Fórmula de distancia en un plano. Si los puntos A y B en un plano coordenado tienen coordenadas respectivas (a_1, a_2) y (b_1, b_2) , entonces la distancia $d(A, B)$ entre A y B estará dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

No daremos la demostración de A.17. Se deduce con facilidad a partir del Teorema de Pitágoras y A.16.

El conjunto $\mathbb{R}_3$ de ternas ordenadas de números reales puede usarse como un conjunto de coordenadas para los puntos en un espacio euclidiano E_3 . Esto se hace generalmente se-

leccionando tres ejes coordenados perpendiculares entre sí, que se intersecten en sus orígenes. Denominemos a estos ejes el eje x , el eje y y el eje z . Cada punto P en E_3 tiene las coordenadas únicas, (a, b, c) en $\mathbb{R}_3$, donde la coordenada del pie de la perpendicular trazada desde P hasta el eje x es a , de P al eje y , es b , y de P al eje z es c (Fig. A.3). Asimismo, cada terna ordenada (a, b, c) en $\mathbb{R}_3$ son las coordenadas de un punto único en E_3 . Si P tiene las coordenadas (a, b, c) , llamamos a a la *coordenada x* , b la *coordenada y* , y c la *coordenada z* de P . Llamaremos a E_3 un *espacio tridimensional cartesiano*, si las coordenadas se asignan a los puntos de E_3 en la manera descrita anteriormente.

Si los ejes coordenados en un espacio tridimensional cartesiano tienen la misma escala, entonces la distancia entre dos puntos en E_3 puede encontrarse de la manera siguiente.

A.18. Fórmula de distancia en el espacio. Si los puntos A y B en un espacio tridimensional coordenado tienen coordenadas respectivas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) , entonces la distancia $d(A, B)$ entre A y B estará dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

La demostración de A.18 se deduce fácilmente del Teorema de Pitágoras y de A.17.

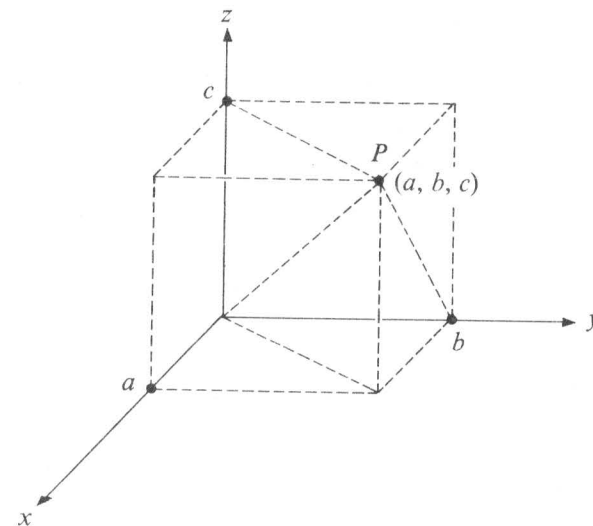


FIGURA A.3

3. ESPACIOS UNITARIOS

El campo $\mathbf{C}$ de los números complejos se usa con frecuencia en aplicaciones matemáticas a la física y otras ciencias relacionadas. En algunas aplicaciones se emplean espacios vectoriales que tienen a los números complejos en lugar de números reales como campo de escalares. Entonces consideremos los espacios vectoriales que tienen a $\mathbf{C}$ como campo de escalares.

Sea V un espacio vectorial que tenga a $\mathbf{C}$ como campo de escalares. Todos los resultados de los Caps. 1 y 2 se mantienen para un espacio vectorial sobre cualquier campo. Por lo tanto, a un conjunto de vectores no cero $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ de V se le llama una base si tales vectores generan a V (esto es, cada $\mathbf{x} \in V$ tiene la forma $\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_n\mathbf{x}_n$ para algunos $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{C}$) y son linealmente independientes (esto es, $\mathbf{C}\mathbf{x}_i \cap (\mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{C}\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{C}\mathbf{x}_{i+1} + \dots + \mathbf{C}\mathbf{x}_n) = \{\mathbf{0}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$). Si V , tiene una base que consiste de n vectores, n será llamada la dimensión de V , como de costumbre.

Como $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, cada espacio vectorial V que tiene a $\mathbf{C}$ como campo de escalares también tiene a $\mathbf{R}$, un subcampo de $\mathbf{C}$, como campo de escalares. Si V tiene una base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ cuando se considera como un espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$, entonces tiene una base $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, i\mathbf{x}_1, i\mathbf{x}_2, \dots, i\mathbf{x}_n\}$ cuando se le considera como espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$. Esto es porque cada $\mathbf{x} \in V$ tiene la forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$ para algunas $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{C}$. Ahora $c_1 = a_1 + ib_1$, $c_2 = a_2 + ib_2$, $\dots$, $c_n = a_n + ib_n$ para algunas $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{R}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_n\mathbf{x}_n + b_1i\mathbf{x}_1 + b_2i\mathbf{x}_2 + \dots + b_ni\mathbf{x}_n;$$

esto es, B es un conjunto de generadores de V en $\mathbf{R}$. Evidentemente $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en lo anterior si, y sólo si, $a_1 + ib_1 = 0$, $a_2 + ib_2 = 0$, $\dots$, $a_n + ib_n = 0$, esto es, si, y sólo si $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$. Por lo tanto B es una base de V . En consecuencia, un espacio vectorial V de dimensión n sobre $\mathbf{C}$ es de dimensión $2n$ sobre el subcampo $\mathbf{R}$ de $\mathbf{C}$.

Para cada entero positivo n , sea $\mathbf{C}_n$ el conjunto de todas las n -adas con coordenadas $\mathbf{C}$. Puede demostrarse, tal como ocurrió en el caso de $\mathbf{R}_n$ en el Cap. 1, que $\mathbf{C}_n$ es un espacio vectorial que tiene a $\mathbf{C}$ como campo de escalares. Nuevamente, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de $\mathbf{C}_n$ donde las $\mathbf{u}_i$'s son como se de-

finen en la Pág. 27. Todo espacio vectorial de n dimensiones sobre $\mathbf{C}$, es isomorfo a $\mathbf{C}_n$.

Un espacio vectorial V que tiene $\mathbf{C}$ como campo de escalares se llama un *espacio de producto interno* si, y sólo si, tiene un producto interno que satisfaga 3.3. Por lo tanto, asociado con cada par $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de vectores en V está el producto interno $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ en $\mathbf{C}$, con las siguientes propiedades:

- (1) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.
- (2) $(a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a \in \mathbf{C}$.
- (3) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ es un número real para toda $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ con $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ si, y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Aun cuando $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ no es necesariamente un número real, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ es un número real de acuerdo con (3) anterior.

A.19. Definición de un espacio unitario. Un espacio V de producto interno sobre $\mathbf{C}$ se llama un *espacio unitario* si, y sólo si,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} \text{ para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

En esta definición usamos la notación $\bar{c}$ para el conjugado del número complejo c . Por lo tanto si $c = a + bi$, donde $a, b \in \mathbf{R}$, entonces $\bar{c} = a - bi$. Puede verificarse fácilmente que

$$\overline{c + d} = \bar{c} + \bar{d}, \quad \overline{cd} = \bar{c}\bar{d} \text{ para todo } c, d \in \mathbf{C}.$$

La longitud de un vector $\mathbf{x} \in V$ se define como en caso de 3.6:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \text{ para todo } \mathbf{x} \in V.$$

Como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ es un número real positivo si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, cada vector no cero $\mathbf{x} \in V$ tiene una longitud positiva. Por supuesto $|\mathbf{0}| = 0$.

Cada número complejo c tiene un valor absoluto definido por $|c| = \sqrt{c \cdot \bar{c}}$. Si $c = a + bi$, donde $a, b \in \mathbf{R}$, entonces $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por lo tanto $|c|$ es un número real, $|0| = 0$, y $|c| > 0$ si $c \neq 0$.

En un espacio unitario V podemos calcular $\mathbf{x} \cdot (c\mathbf{y})$ para cualquier $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $c \in \mathbf{C}$ como sigue:

$$\mathbf{x} \cdot (c\mathbf{y}) = \overline{(c\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x}} = \overline{c(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})} = \bar{c}(\overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}) = \bar{c}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Esto es:

$$\mathbf{A.20} \quad \mathbf{x} \cdot (c\mathbf{y}) = \bar{c}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \text{ para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, c \in \mathbb{C}.$$

Usando A.20, tenemos la siguiente analogía con 3.8, para un espacio unitario V :

$$\mathbf{A.21} \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j \mathbf{y}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_j).$$

En particular, tenemos

$$|\mathbf{c}\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{c}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{c}\mathbf{x})} = \sqrt{\bar{c}c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})} = \sqrt{\bar{c}c} \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

de tal modo que

$$\mathbf{A.22} \quad |\mathbf{c}\mathbf{x}| = |c| |\mathbf{x}| \text{ para todo } \mathbf{x} \in V, c \in \mathbb{C}.$$

La desigualdad de Cauchy (3.9) se mantiene para un espacio unitario V tanto como para un espacio euclidiano.

$$\mathbf{A.23} \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \text{ para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Demostración: Como en la demostración de 3.9, sea $\mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \neq 0$, $\mathbf{b} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{y} = \mathbf{w} = \mathbf{a}\mathbf{v} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{u}$. Entonces $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{a}^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{b}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{a}^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}\mathbf{b} - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}\mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}[\mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{b}]. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \geq 0$, $\mathbf{a} > 0$, y $\bar{\mathbf{b}}\mathbf{b} = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$, tenemos

$$\mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{b} \geq 0.$$

Esto demuestra A.23.

El lector podrá demostrar fácilmente la siguiente desigualdad del triángulo, multiplicando $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})$ y usando la desigualdad de Cauchy y el hecho de que $\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} \leq 2\sqrt{\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}}$ para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ (haciendo $\mathbf{a} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$).

$$\mathbf{A.24} \quad |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

No entraremos en detalles, pero puede demostrarse que todo espacio unitario finitodimensional tiene una base ortogonal normal.

El espacio vectorial $\mathbf{C}_n$ descrito con anterioridad tiene un producto punto definido de la manera siguiente:

$$\mathbf{A.25} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i.$$

No le resultará difícil al lector demostrar que el producto punto es un producto interno y que $\mathbf{C}_n$ es realmente un espacio unitario.

4. NOTA HISTORICA

El uso de vectores para representar fuerzas se remonta por lo menos al físico holandés Simón Steven. Usaba lo que recibía el nombre de "triángulo de fuerzas" en su tratado *Estática e Hidroestática*, publicado en 1586. En ese libro sumaba vectores como lo hacemos en V_3 para obtener la resultante de fuerzas en el espacio. Sin embargo, porque no hizo uso de la operación de producto vectorial, trabajaba con un espacio vectorial y no con álgebra vectorial.

La operación de producto vectorial en V_3 fue descubierta por el matemático, físico y astrónomo irlandés Sir William Rowan Hamilton, alrededor de 1840 como resultado marginal de su trabajo sobre cuaternios. En el prefacio de su libro *Lecciones sobre cuaternios* (1853), Hamilton nos habla de la búsqueda de un álgebra vectorial tridimensional, la que inició en 1834 y en la cual trabajó sin éxito por varios años. El buscaba una operación producto en V_3 que junto a la operación de suma tradicional convertiría a V_3 en un campo.

Le fue imposible dar con esa operación producto en V_3 , y ahora sabemos que así tenía que suceder, ya que puede demostrarse que no existe tal producto en V_3 . Como ocurre con frecuencia, sin embargo, su búsqueda lo condujo a un descubrimiento no menos importante, aunque de diferente naturaleza. Descubrió un álgebra vectorial H de cuatro dimensiones, a la que llamó *álgebra de cuaternios*.* Si pensamos en H como en $\mathbb{R}_4$, entonces la base de H es $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, donde, como de costumbre,

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0),$$

$$\mathbf{u}_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Los cuaternios unitarios anteriores se multiplican de acuerdo con la tabla siguiente. Para encontrar $\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j$ mediante esta tabla, miramos en la columna abajo de $\times$ para $\mathbf{u}_i$ y en la fila a la derecha de $\times$ para $\mathbf{u}_j$. Entonces $\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j$ es el símbolo en la tabla a la derecha de $\mathbf{u}_i$ y directamente abajo de $\mathbf{u}_j$. Por ejemplo,

* Hamilton obtuvo álgebras de 3 y 4 dim, pero el campo sólo existe en 4 dim.

$$\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_4, \quad \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_4, \quad \mathbf{u}_4 \times \mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2.$$

$\times$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_4$
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_4$
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_4$	$-\mathbf{u}_3$
$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_4$	$-\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$
$\mathbf{u}_4$	$\mathbf{u}_4$	$\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$

Habiendo definido la multiplicación para una base de H , podemos definir la multiplicación en H de un modo natural. Así, para toda $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \in H$, tenemos

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=1}^4 a_i \mathbf{u}_i,$$

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = \sum_{j=1}^4 b_j \mathbf{u}_j,$$

y definimos

$$\text{A.26} \quad \left(\sum_{i=1}^4 a_i \mathbf{u}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^4 b_j \mathbf{u}_j \right) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i b_j (\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j).$$

Esto es, multiplicamos cada término de la primera suma por cada término de la segunda, lo que nos da 16 términos del lado derecho de la ecuación A.26.

Ejemplo 1. Encuentre el producto $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, donde $\mathbf{x} = (0, 1, -2, 2)$ y $\mathbf{y} = (1, -3, 4, 0)$.

Solución: Tenemos

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4, \quad \mathbf{y} = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= (\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4) \times (\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3) \\ &= \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1 - 3(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_2) + 4(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) - 2(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) \\ &\quad + 6(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2) \\ &\quad - 8(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_3) + 2(\mathbf{u}_4 \times \mathbf{u}_1) - 6(\mathbf{u}_4 \times \mathbf{u}_2) + 8(\mathbf{u}_4 \times \mathbf{u}_3). \end{aligned}$$

Usando la tabla de multiplicación de arriba, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_4 - 2\mathbf{u}_3 - 6\mathbf{u}_4 + 8\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_4 - 6\mathbf{u}_3 - 8\mathbf{u}_2 \\ &= 11\mathbf{u}_1 - 7\mathbf{u}_2 - 8\mathbf{u}_3 \\ &= (11, -7, -8, 0). \end{aligned}$$

Si simplificamos el lado derecho de la ecuación A.26 como lo hicimos con el ejemplo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{A.27} \quad \left(\sum_{i=1}^4 a_i \mathbf{u}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^4 b_j \mathbf{u}_j \right) &= (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) \mathbf{u}_1 \\ &\quad + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3) \mathbf{u}_2 \\ &\quad + (a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - a_2 b_4) \mathbf{u}_3 \\ &\quad + (a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{u}_4. \end{aligned}$$

Esta ecuación define el producto de todo par de cuaternios.

No llevaremos a cabo la demostración, pero puede demostrarse que el álgebra de cuaternios H de Hamilton tiene las propiedades A.1-A.6 de un campo, con la excepción de la parte multiplicativa de A. 1. Por lo tanto, H es un *campo no conmutativo*. Resulta evidente que la multiplicación no es conmutativa a partir de la tabla de productos de vectores unitarios: por ejemplo, $\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_4$, mientras $\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_4$. Puede demostrarse que la multiplicación en H es anticonmutativa:

$$\text{A.28} \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x} \text{ para toda } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H.$$

Como señala Hamilton en su prefacio, es sumamente sencillo obtener un álgebra vectorial tridimensional a partir de H . Solamente necesitamos considerar

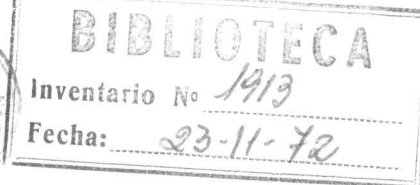
$$\mathbf{i} = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1)$$

y luego multiplicar vectores en V_3 de acuerdo con A.27, cuidando de omitir el primer término (el que contiene a $\mathbf{u}_1$). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (a_2 \mathbf{i} + a_3 \mathbf{j} + a_4 \mathbf{k}) \times (b_2 \mathbf{i} + b_3 \mathbf{j} + b_4 \mathbf{k}) &= (a_3 b_4 - a_4 b_3) \mathbf{i} \\ &\quad + (a_4 b_2 - a_2 b_4) \mathbf{j} \\ &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{k} \end{aligned}$$

de acuerdo con A.27 (haciendo $a_1 = 0, b_1 = 0$, y omitiendo el primer término). Notamos inmediatamente que esto nos da 4.12.

Aunque Hamilton indicó cómo definir la multiplicación en V_3 , nunca utilizó el álgebra V_3 en su trabajo. Quedó para los físicos J. Willard Gibbs y Oliver Heaviside explotar esta álgebra en la década de los años 1880 y demostrar su extensa aplicabilidad tanto a la física como a otras ciencias.



Indice

— A —	— G —
<i>n</i> -Ada, 25	Generado, 14
Algebra vectorial, 73	Generadores, 44
— B —	— H —
Base, 35	Homomorfismos, 45
ortogonal normal, 68	— I —
— C —	Independencia, 31
Campo, 98	Isomorfismo, 46
ordenado, 100	— L —
Centroide para un triángulo, 36	Linealmente, dependientes, 34
tetraedro, 41	independientes, 34
Combinación lineal, 14	Líneas en el espacio, 84
Componentes, 49, 51	Longitud de los vectores, 60
Cosenos directores, 90	— M —
Cuaternios, 109	Mapeo, 45
— D —	— N —
Dependiente, 31	Núcleo, 56
Desigualdad de Cauchy, 60, 108	— O —
Dimensión, 40	Ortogonal, 68
— E —	— P —
Ecuaciones paramétricas de la línea, 85	Planos, 92
Escalar, 10	Producto, interno, 59
Espacio, de producto interno, 59	punto, 57
euclidiano, 59	vectorial, 73
unitario, 107	Propiedad de reemplazo, 38
Espacios vectoriales, 9	— S —
— F —	Subespacios, 12
Forma simétrica de la ecuación de una línea, 87	
función 1-1, 46	

— V —

- de posición, 49
- geométrico, 14
- normal, 60
 - para un plano, 93
- unitario, 60
- Vectores libres, 15